TIN – demo 1 – 22. 9. 2023

I. OPAKOVÁNÍ IDM

- logika výroková:
  - bool. / výr. prom. = atom. form.
  - formule nad atomy: $\vee, \wedge, \neg, xor, \ldots, \Rightarrow, \Leftrightarrow \ldots$
  -

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

  - $(p \Rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$

- logika predikátová (1. řádu):
  - proměnné $x, y, \ldots$ z univerza
  - termy: – proměnné, aplikace funkcí na termy.
    - např. $x+y$, $f(x+y, z), \ldots$
    - funktor (syntax) – f-ce (sémantika)
  - atom. formule: – $P(x+y, z)$, $x+y < z$ ← pred. symbol
    - pred. symb. (syntax) → relace (sémantika)

- formule: atom. f., bool. spojky, $\forall$, $\exists$

- <u>množiny</u> – dobře (jednoznačně) definované kolekce různých (odlišitelných) prvků, nad nimiž jsou definovány určité operace ($\cup, \cap, \setminus, \dots$) a predikáty ($\in, \subseteq, \dots$).
  - zápis – POZOR: $\underline{\{}$ $\underline{\}}$ (NE: ~~( ) [ ] < >~~)

- obecnější pojem: – <u>třídy</u>
  – ex. třída všech množin, ne množina všech množin!

- <u>Kartézský součin množin</u>:
  - pro $n \geq 1$ a množiny $A_1, \dots, A_n$ je definován následovně:

    $$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n : a_i \in A_i\}$$
  - pro $n = 0$ $\prod_0 = \{()\}$

- <u>Relace na množinách</u>
  - n-ární relace ρ na mn-ách $A_1, \dots, A_n$ je podmnožina $A_1 \times \dots \times A_n$, tedy $\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

– Binární relace ρ na mn-ě A (tedy $\rho \subseteq A \times A$)

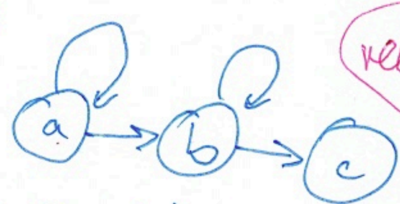
– lze reprezentovat:

a) množinově, např. pro $A = \{a, b, c\}$ může být $\rho = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c)\}$.

b) maticí

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

c) grafem (orientovaným):



relace $\rho_{př}$

POZOR! nelze spojit se souvislostí grafu relace [zpočátku chybné řečeno]

– Vlastnosti binárních relací ($\rho \subseteq A \times A$)

a) ρ je souvislá : $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y \rho x$

b) ρ je reflexivní : $\forall x \in A : x \rho x$

c) ρ je ireflexivní : $\forall x \in A : x \not\rho x$

d) ρ je symetrická : $\forall x, y \in A : x \rho y \Rightarrow y \rho x$

e) ρ je asymetrická : $\forall x, y \in A : x \rho y \Rightarrow y \not\rho x$ [nesmí mít self-loops]

f) ρ je antisymetrická : $\forall x, y \in A : x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

g) ρ je tranzitivní : $\forall x, y, z \in A : x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$.

pro relaci $\rho_{př}$:

a) NENÍ : $a \not\rho_{př} c \wedge c \not\rho_{př} a$

b) NE: $c \not\rho_{př} c$

c) NE: $a \rho_{př} a$

d) NE: $a \rho_{př} b \wedge b \not\rho_{př} a$

e) NE: $a \rho_{př} a$

f) ANO

g) NE: $a \rho_{př} b \wedge b \rho_{př} c \wedge a \not\rho_{př} c$.

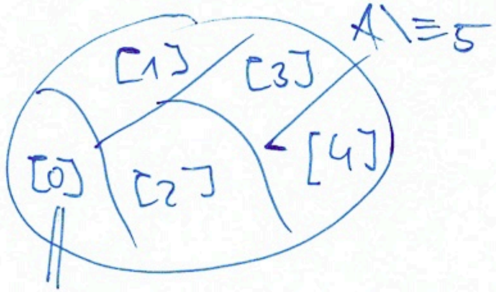
- <u>tranzitivní uzávěr relace</u> $\rho \subseteq A \times A$ je relace $\rho^+ \subseteq A \times A$ taková, že $\forall a,b \in A : a \rho^+ b \overset{def.}{\iff} \exists n \geq 1\ \exists c_1, \dots, c_n \in A :$

$$a = c_1 \wedge (\forall 1 \leq i < n : c_i \rho c_{i+1}) \wedge c_n = b$$

  - např. $\rho^+_{př}$ bude obsahovat opravdu $\rho_{př}$ hranu (a,c).
  - dá se spočítat Warshallovým alg.
- <u>reflex. a tranz. uzávěr relace</u> $\rho \subseteq A \times A$ je relace $\rho^* \subseteq A \times A$

def.: $\rho^* = I_A \cup \rho^+$, kde $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

  - do $\rho^+_{př}$ doplní $\rho^*_{př}$ smyčku (c,c).
- <u>rel. ekvivalence</u> – refl., sym., tranzitivní
  - např. $\equiv_5$ (shoda zbytku při dělení 5)



$[5] = [10] = \dots$

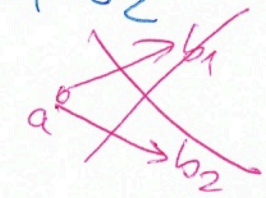
  - ekv. $\equiv \subseteq A \times A$ definuje na A rozklad $A \setminus \equiv$ na ekvivalenční třídy, kde

$$A \setminus \equiv\ = \{[a] \mid a \in A\}, \text{ kde}$$

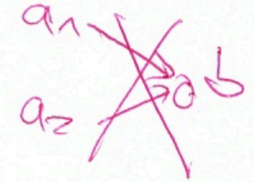
$$[a] = \{b \in A \mid b \equiv a\}.$$

- <u>relace ostrého částečného uspořádání</u> (např. $A \subset B$ na množinách).
  - ireflex., asymetrická, tranz.

- <u>f-ce z množiny A do B</u>
  - relace $f \subseteq A \times B$ je (totální / úplná) f-ce, jestliže implicitní
    $\forall a \in A\ \exists b \in B : (a,b) \in f$ [ozn. $f(a)=b$]
    $\wedge\ \forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B : f(a)=b_1 \wedge f(a)=b_2 \Rightarrow b_1=b_2$



  - <u>injekce</u> (jednoznačná f-ce): $\forall a_1, a_2 \in A\ \forall b \in B$:
    $f(a_1)=b \wedge f(a_2)=b \Rightarrow a_1=a_2$



  - <u>surjektivní</u> (f-ce <u>na</u> množinu):
    $\forall b \in B\ \exists a \in A : f(a)=b$
  - <u>bijekce</u> : injekce $\wedge$ surjekce
    (jedno-jednoznačná)
- <u>kardinalita mn-y A</u> se značí $|A|$
  - "velikost" mn-y
  - pro kon. množiny – počet prvků
  - pro nekonečné množiny platí, že mají stejnou kardinalitu, pokud mezi nimi existuje bijekce; kardinalita pak může být def. jako třída všech vzájemně bijektivních množin.

- nekonečné spočetné množiny – ex. bijekce s $\mathbb{N}$.

- <u>potenční množina množiny A</u>.
  - značí se 2^A
  - $2^A = \{ B \mid B \subseteq A \}$ – množina všech podmnožin
  - např. $2^{\{a,b\}} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$
  - pro konečné A: $|2^A| = 2^{|A|}$
    (dá se dokázat snadno indukcí)

II. Jazyky

- jazyk L nad konečnou neprázdnou abecedou Σ:
  - $L \subseteq \Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$, kde $\Sigma^i = \underbrace{\Sigma . \Sigma . \Sigma \dots \Sigma}_{i\times}$

    ↑ všechny <u>konečné</u> řetězce nad Σ
  - $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$

- Mějme $L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$, kde $L_1 = \{a,b\}$ a $L_2 = \{a, \varepsilon\}$.
  <u>Spočtěte</u> $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 \setminus L_2, L_1^*, L_1^+, L_1 . L_2$.

- $L_1 \cup L_2 = \{a, b, \varepsilon\}$
- $L_1 \cap L_2 = \{a\}$
- $L_1 \setminus L_2 = \{x \in L_1 \mid x \notin L_2\} = \{b\}$
- $L_1 \cdot L_2 = \{aa, \overset{a\cdot\varepsilon}{a}, ba, b\}$
- $L_1^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$
- $L_1^+ = \{a, b, ab, aa, ba, bb, \dots\}$

- Vypočítejte:

$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$
$\emptyset^+ = \emptyset$	$\{\varepsilon\}^+ = \{\varepsilon\}$
$\emptyset \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$	$\emptyset \cap L = \emptyset$
$\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$	$\{\varepsilon\} \cap L = \begin{cases} \emptyset & \text{jestliže } \varepsilon \notin L \\ \{\varepsilon\} & \text{jestliže } \varepsilon \in L \end{cases}$
$\emptyset \cdot \{\varepsilon\} = \emptyset$	$\{\varepsilon\}^2 = \{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
$\emptyset \cdot L = \emptyset$ pro libovolné L	$\{\varepsilon\} \cdot L = L$

III. Gramatiky

kon., nepr. abeceda, $N \cap \Sigma = \emptyset$

- $G = (N, \Sigma, P, S)$ $S \in N$

kon. nepr. mn-a neterm. s.

mn-a přepis. pravidel $P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$.

- zvyklost: $(\alpha, \beta) \in P$ píše se $\alpha \to \beta$

- relace přímé derivace $\underset{G}{\Rightarrow} \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$

je def. tak, že

$$\forall \lambda \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \ \forall \mu \in (N \cup \Sigma)^* :$$

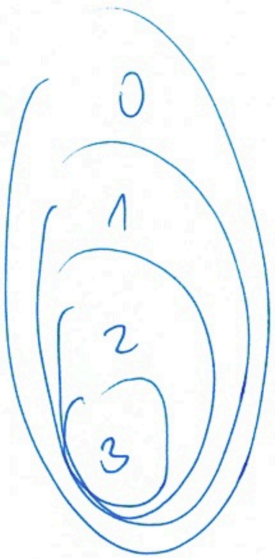
$$\lambda \underset{G}{\Rightarrow} \mu \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^* :$$

$$\lambda = \gamma \alpha \delta \wedge \mu = \gamma \beta \delta \wedge (\alpha \to \beta) \in P$$

- $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \underset{G}{\Rightarrow}^+ w \}$

- <u>Chomského hierarchie gramatik a jazyků</u>

- typ 3 (reg. gr.) : $A \to aB \mid a \mid \varepsilon$ $A, B \in N$; $a \in \Sigma$
  - alternativně:
    - $A \to Ba \mid a \mid \varepsilon$ [nelze míchat]
    - $A \to wB \mid w$ $w \in \Sigma^*$
    - $A \to Bw \mid w$
  - dá se omezit na výskyt ε pouze v pravidla $S \to \varepsilon$ a S nebude nikdy na pravé straně



- typ 2 (bezk. g.) $A \to \alpha$ kde $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
- typ 1 (kontext. gr.) – $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$ $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^+$

  příp. $S \to \varepsilon$ a S se nevyskytuje na pravé straně

  – alternativně $\alpha \to \beta$, kde $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^+$ takové, že $|\alpha| \leq |\beta|$

  příp. $S \to \varepsilon$, kde S...

- typ 0 – neomezené gramatiky

- Jaký jazyk (zapište množinově) generují následující gramatiky? Jakého typu je daná gramatika a jakého typu je daný jazyk?

a) $G_1 = (\{S\}, \{0,1\}, P_1, S)$, kde:

$P_1: S \to 1S1 \mid 0S0 \mid \varepsilon$

- $L(G_1) = \{ w w^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

  reverze řetězo

- G_1 je typu 2
- $L(G_1)$ —"— –

příklad derivace:

$S \Rightarrow 1S1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 11S11 \Rightarrow$
$\Rightarrow 110S011 \Rightarrow$
$\Rightarrow 110011$

var. (b) $\Rightarrow aaabbBCCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbCCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbcCC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbccC \Rightarrow$

$\Rightarrow aaabbbccc$.

- poznámka: Lze zjednodušit pravidla $bB \to bb, \ldots$ na $B \to b$, $C \to c$?

<u>NE</u>: vygenerovalo by "to" všechny chtěné řetězce, ale také ty nechtěné!

- Zapište gramatiku typu 2, která generuje jazyk

$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w) \}$

↑ počet 0

P: $S \to 0S1S \mid 1S0S \mid \varepsilon$

$G = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$

Analogie (() ())) ()(

[Lze zjednodušit: $S \to 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \varepsilon$]

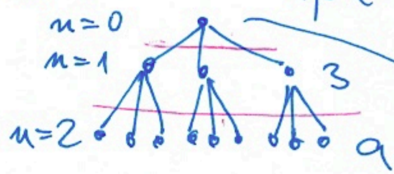
– Sestrojte gramatiku, která generuje jazyk

$$L = \{ a^{3^n} b^n \mid n \geq 1 \} = \{ a^3 b^1, a^9 b^2, a^{27} b^3, \ldots \}$$

$$P: \quad S \to ZS \mid ZaX$$
$$Za \to aaaZ$$
$$ZX \to Xb \mid b$$

$$G = (\{S, Z, X\}, \{a, b\}, P, S).$$

Intuice:



úplné ternární stromy

počet listů

příklad derivace:

$$S \Rightarrow ZS \Rightarrow ZZS \Rightarrow ZZZaX \Rightarrow ZZaaaZX \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \cancel{Z}aaa\,aaa\,aaa\,ZZX \Rightarrow a^{27}ZZZX \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^{27}ZZXb \Rightarrow a^{27}ZXbb \Rightarrow a^{27}b^3$$