

## Modelování a simulace

Petr Peringer  
peringer AT fit.vutbr.cz  
Martin Hrubý  
hrubym AT fit.vutbr.cz

Vysoké učení technické v Brně,  
Fakulta informačních technologií,  
Božetěchova 2/1,  
612 00 Brno

(Verze: 14. září 2023)

## Úvod

Text je určen pro studenty FIT. Obsahuje základní přehled problematiky modelování a simulace vhodný pro studenty bakalářského studia. Předpokládají se základní znalosti programování (C, C++, ...) a matematiky (relace, derivace, integrály, dif. rovnice).

Obsah slajdů je velmi stručný, podrobnější informace jsou součástí výkladu.

Na slajdech spolupracovali:

- Martin Hrubý – Petriho sítě, náhodné procesy

## Pravidla

- Přednášky
- Minimálně 2 demo-cvičení (+doplňky)
- Samostatná práce: projekt
- Konzultace

### Hodnocení celkem 100b:

- 10b půlsestrální test
- 20b projekt
- Zápočet: alespoň 10 z výše uvedených bodů
- 70b zkouška (požadováno min. 30 bodů)

## Zdroje informací

- Literatura
- WWW odkazy
- Oficiální stránka:  
<https://www.fit.vutbr.cz/study/course/IMS/>
- Aktuální informace pro studenty:  
.../IMS/public/
- Vlastní uvažování a (simulační) experimenty
- ...

## Literatura

- Fishwick P.: *Simulation Model Design and Execution: Building Digital Worlds*, Prentice-Hall, 1995
- Law A., Kelton D.: *Simulation Modelling & Analysis*, second edition, McGraw-Hill, 1991
- Rábová a kol.: *Modelování a simulace*, skriptum VUT, Brno, 1992
- Ross S.: *Simulation*, 3rd edition, Academic Press, 2002
- (Zeigler B., Muzzy A., Kofman E.: *Theory of Modelling and Simulation*, 3rd edition, Academic Press, 2019)
- ...

### Poznámky:

Studijní opora — viz IS  
(Poznámka: Informace k zadání Bc práce — témata.)

## Modelování systémů na počítačích

### Přehled

- Základní pojmy a princip
- Souvislosti a použití
- Výhody a nevýhody
- Alternativy
- Úvod do teorie systémů
- Typy simulace
- Velmi stručný přehled simulačních nástrojů

## Základní pojmy (systém, model)

### Systém =

soubor elementárních částí (prvků systému), které mají mezi sebou určité vazby.

Rozlišujeme (mimo jiné)

- reálné systémy
- nereálné systémy (fiktivní, ještě neexistující)

### Model =

napodobenina systému jiným systémem.

- Model = reprezentace znalostí.
- Klasifikace: fyzikální modely, matematické modely, ...
- Přírodní zákony jsou matematické modely (Příklad: Ohmův zákon  $u = Ri$ ).

## Základní pojmy (modelování, simulace)

### Modelování =

vytváření modelů systémů.

- Modelování je velmi používaná metoda
- Modelovat lze jen to, co známe a umíme popsat

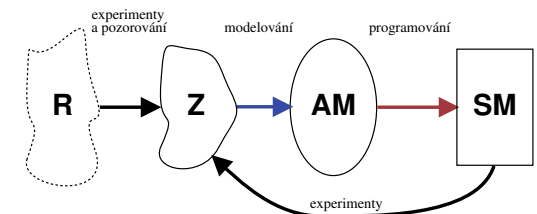
### Simulace =

získávání nových znalostí o systému experimentováním s jeho modelem.

- Budeme se zabývat pouze simulací na číslicových počítačích.

## Princip modelování a simulace

Realita → Znalosti → Abstraktní model → Simulační model



Cílem je získat nové znalosti o modelovaném systému.

- 1 **Vytvoření abstraktního modelu:** Formování zjednodušeného popisu zkoumaného systému.
- 2 **Vytvoření simulačního modelu:** Zápis abstraktního modelu formou programu.
- 3 **Verifikace a validace:** Ověřování správnosti modelu.
- 4 **Simulace:** Experimentování se *simulačním* modelem.
- 5 **Analýza a interpretace výsledků:** Získání nových znalostí o zkoumaném systému.

- pozorování a reálné experimenty
- *Computational Science*
- učení, hry — "co se stane když"
- programování (simulační model je program)
- algoritmy, datové struktury
- numerická matematika (integrační metody, ...)
- počítačová grafika (vizualizace výsledků)
- technické vybavení: superpočítače, ...
- teorie systémů (stabilita, citlivost, chaos, ...)
- pravděpodobnost a statistika
- + obory související s modelovaným systémem

- **Věda:** biologie, lékařství, ekologie, chemie, jaderná fyzika, astronomie, sociologie, ... (Např. předpověď počasí, zemětřesení, šíření epidemií, ...)
- **Technika:** strojírenství, stavebnictví, doprava, elektro, ... (Dynamika konstrukcí, simulace mikroprocesorů, optimalizace motoru, ...)
- **Ekonomika** (Vývoj cen na burze, ...)
- **Výuka** (Různé demonstrační modely)
- **Film** (Vizuální efekty všeho druhu)
- **Hry** (Simulátor letadla, ...)
- ...

- Cena (např. "crash" testy automobilů)
- Rychlost (růst rostlin, vznik krystalů, pohyb planet)
- Bezpečnost (jaderné reakce, šíření epidemií)
- ...
- Někdy jediný způsob (srážky galaxií)
- Možnost modelovat velmi složité systémy (mikroprocesory, různé biologické systémy, počasí)

Velmi často je výhodnější experimentovat s modely, než s originálními systémy.

- Problém validity (platnosti) modelu.
- Někdy velmi vysoká náročnost vytváření modelů.
- Náročnost na výkon počítačů.
- Získáváme konkrétní numerické výsledky (například změna parametru vyžaduje celou simulaci opakovat).
- Nepřesnost numerického řešení.
- Problém stability numerických metod.

### Analytické řešení modelů

- Popis chování systému matematickými vztahy a jeho *matematické řešení*.
- Vhodné pro jednoduché systémy nebo zjednodušené popisy složitých systémů.
- Výsledky jsou ve formě funkčních vztahů, ve kterých se jako proměnné vyskytují parametry modelu.
- Dosazením konkrétních hodnot získáme řešení.

Shrnutí: Hlavní předností analytického řešení je přesnost a menší časová náročnost výpočtu řešení matematického modelu. Řešit ale umíme jen modely jednoduché nebo podstatně zjednodušené.

**Příklad:** Model volného pádu ve vakuu

Simulaci je vhodné použít když:

- neexistuje *úplná* matematická formulace problému nebo nejsou známé analytické metody řešení matematického modelu;
- analytické metody vyžadují tak zjednodušující předpoklady, že je nelze pro daný model přijmout;
- analytické metody jsou dostupné pouze teoreticky, jejich použití by bylo obtížné a simulační řešení je jednodušší;
- modelování na počítači je jedinou možností získání výsledků v důsledku obtížnosti provádění experimentů ve skutečném prostředí;
- potřebujeme měnit časové měřítko (simulace např. umožní vypočítat řešení rychleji než by proběhl příslušný děj v reálném systému).

(*Systems Theory, Systems Science*)

### Přehled:

- Definice základních pojmů:
  - Systém
  - Prvek systému
  - Časová množina
  - Chování systému
  - Okolí systému
- Homomorfní a izomorfní systémy
- Klasifikace prvků systému a systémů

Systém  $S$  je dvojice

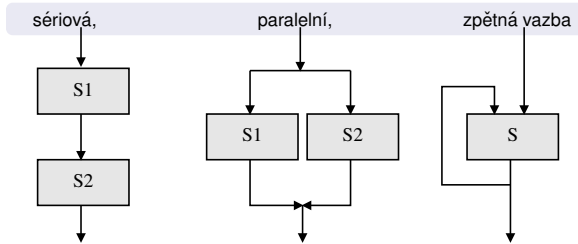
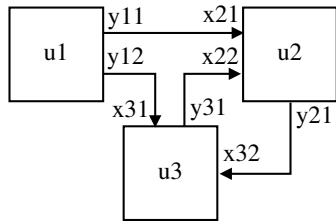
$$S = (U, R)$$

kde:

- Univerzum  $U$  je konečná množina prvků systému:  
 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$
- Prvek systému:  $u = (X, Y)$  kde
  - $X$  je množina všech vstupních proměnných
  - $Y$  je množina všech výstupních proměnných
- Charakteristika systému  $R$  je množina všech propojení:  
$$R = \bigcup_{i,j=1}^N R_{ij}$$
- Propojení prvku  $u_i$  s prvkem  $u_j$ :  $R_{ij} \subseteq Y_i \times X_j$

$$U = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$R = \{(y_{11}, x_{21}), (y_{12}, x_{31}), (y_{21}, x_{32})\}$$



Budeme rozlišovat tři základní pojmy:

**Reálný čas** ve kterém probíhá skutečný děj v reálném systému (viz fyzikální definice času).

**Modelový čas** je "časová osa" modelu (modeluje reálný čas ve vzorového systému — např. proměnná  $t$  v diferenciální rovnici  $y'' = -g$ ). Při simulaci nemusí být synchronní s reálným časem.

**Strojový čas** je čas CPU spotřebovaný na výpočet programu (závisí na složitosti simulačního modelu, počtu procesorů a nespojuje přímo s modelovým časem).

**Poznámka:** Příkaz time (POSIX)

(Time base)

$T$  je množina všech časových okamžiků, ve kterých jsou definovány hodnoty vstupních, stavových a výstupních proměnných prvku systému.

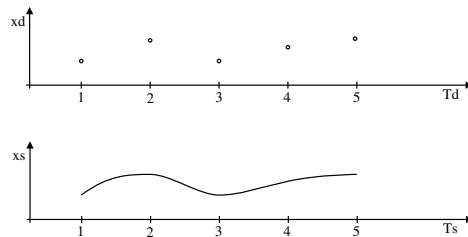
**Příklady časových množin**

- diskrétní:  $T_d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- spojitá:  $T_s = (1.0, 5.0)$   $T_s \subset \mathbf{R}$

**Poznámka:**

Na číslicovém počítači se spojitá časová množina vždy diskretizuje.

Signály s diskretní ( $T_d$ ) a spojitou ( $T_s$ ) časovou množinou:



- Každému časovému průběhu vstupních proměnných přiřazuje časový průběh výstupních proměnných.
- Je dáno vzájemnými interakcemi mezi prvky systému.

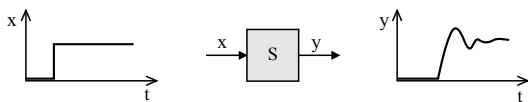
Chování systému  $S$  můžeme definovat jako zobrazení  $\chi$ :

$$\chi : [\sigma_i(S)]^T \rightarrow [\sigma_o(S)]^T$$

kde:

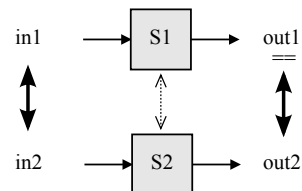
- $[A]^T$  je množina všech zobrazení  $T$  do množiny  $A$ ,
- $\sigma_i(S)$  je vstupním prostorem systému  $S$ ,
- $\sigma_o(S)$  je výstupním prostorem systému  $S$ .

- Spojitý systém  $S$ , odezva na jednotkový skok:



Systémy  $S_1$  a  $S_2$  považujeme za systémy se stejným chováním, vyvolají-li stejné podněty u obou systémů stejné reakce.

Stejnými podněty/reakcemi rozumíme ty dvojice podnětů/reakcí, které jsou spolu vzájemně přiřazeny definovaným vstupním/výstupním zobrazením.



Systémy  $S_1 = (U_1, R_1)$  a  $S_2 = (U_2, R_2)$  jsou izomorfní, když a jen když:

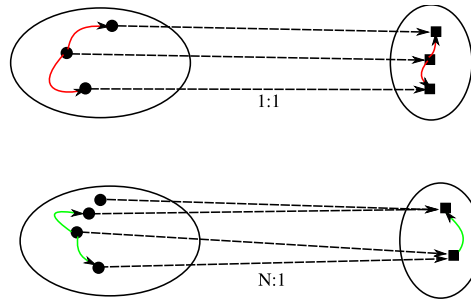
- 1 Prvky univerza  $U_1$  lze vzájemně jednoznačně (1:1) přiřadit prvkům univerza  $U_2$ .
- 2 Prvky charakteristiky  $R_1$  lze vzájemně jednoznačně přiřadit prvkům charakteristiky  $R_2$ , a to tak, že prvku charakteristiky  $R_1$ , vyjadřujícímu orientovaný vztah mezi dvěma prvky univerza  $U_1$ , je vždy přiřazen právě ten prvek charakteristiky  $R_2$ , který vyjadřuje stejně orientovaný vztah mezi odpovídající dvojicí prvků univerza  $U_2$  a naopak.

**Poznámka:** Zjednodušeno (nezahrnuje chování).

Systém  $S_1 = (U_1, R_1)$  je homomorfní se systémem  $S_2 = (U_2, R_2)$  právě když:

- Prvkům univerza  $U_1$  je možno přiřadit jednoznačně prvky univerza  $U_2$  (opačně tomu tak být nemusí, N:1).
- Prvkům charakteristiky  $R_1$  je možno jednoznačně přiřadit prvky charakteristiky  $R_2$ , a to tak, že prvku charakteristiky  $R_1$  vyjadřujícímu orientovaný vztah mezi dvěma prvky univerza  $U_1$  je vždy přiřazen právě ten prvek charakteristiky  $R_2$ , který vyjadřuje stejně orientovaný vztah mezi odpovídající dvojicí prvků univerza  $U_2$  ve smyslu bodu 1.

**Poznámka:** Vytváření homomorfních systémů je základním principem modelování.



Podstatné okolí systému zahrnuje vše co má vliv na chování systému a není jeho součástí.

- Uzavřený systém — nekomunikuje s okolím (často jen zanedbáváme vliv okolí)
- Otevřený systém — komunikuje s okolím (typicky má definován vstup i výstup)

### Klasifikace 1:

- Prvky se spojitým chováním
- Prvky s diskretním chováním

### Klasifikace 2:

- Prvky s deterministickým chováním
- Prvky s nedeterministickým chováním

### Příklady:

Šumová dioda = spojitý prvek, stochastické chování  
 Rezistor = spojitý prvek, deterministické chování  
 FIFO Fronta = diskretní prvek, deterministické chování

Typ systému závisí na typu jeho prvků.

### Systémy:

- spojité: všechny prvky mají spojitě chování
- diskretní: všechny prvky mají diskretní chování
- kombinované: obsahuje spojitě i diskretní prvky

### Systémy:

- deterministické: všechny prvky deterministické
- nedeterministické: obsahuje alespoň jeden prvek s nedeterministickým chováním

= experimentování s reprezentací simulačního modelu.

### Cíl simulace:

získání nových informací o chování systému v závislosti na vstupních veličinách a na hodnotách parametrů.

### Postup:

opakované řešení modelu (provádění simulačních běhů),

- nastavení hodnot parametrů a počátečního stavu modelu,
- zadávaní vstupních podnětů z okolí při simulaci,
- vyhodnocení výstupních dat (informací o chování systému)

Simulační běhy opakujeme tak dlouho, dokud nezískáme dostatek informací o chování systému nebo pokud nenalezneme takové hodnoty parametrů, pro které má systém žádané chování.

### Podle použitého popisu modelu:

- Spojitá / diskretní / kombinovaná
- Kvalitativní / kvantitativní
- ...

### Podle simulátoru:

- Na analogovém / číslicovém počítači, fyzikální
- "Real-Time" simulace
- Paralelní a distribuovaná simulace

### Další možnosti:

- Vnořená simulace (simulace v simulaci)
- "Reality in the loop"
- Interaktivní simulace, virtuální realita

### Postup:

- Záznam průběhu simulace
- Vizualizace výsledků, animace

### Analýza získaných výsledků:

- Intuitivní vyhodnocení, heuristiky, ...
- Statistické zpracování
- Automatické vyhodnocení (např. pro optimalizaci)
- Porovnávání s naměřenými daty
- ...

Verifikaci ověřujeme korespondenci *abstraktního* a *simulačního* modelu, tj. izomorfní vztah mezi AM a SM.

- Předchází vlastní etapě simulace.
- Analogicky s programy v běžných programovacích jazycích představuje verifikace simulačního modelu jeho ladění.

### Poznámka:

Abstraktní model je formální specifikací pro program (simulační model).

Ověřování validity (platnosti) simulačního modelu je proces, v němž se snažíme dokázat, že skutečně pracujeme s modelem adekvátním modelovanému systému.

- Jeden z nejobtížnějších problémů modelování.
- Vyžaduje neustálou konfrontaci informací, které o modelovaném systému máme a které simulací získáváme.
- Nelze absolutně dokázat přesnost modelu. (Validitu modelu chápeme jako míru použitelnosti/správnosti získaných výsledků.)
- Pokud chování modelu neodpovídá předpokládanému chování originálu, musíme model modifikovat.

Simulační systémy usnadňují vytváření modelů, provádění experimentů a analýzu výsledků.

Tyto nástroje jsou použitelné pro:

- práci s abstraktními modely (báze znalostí, ...),
- programování simulačních modelů (simulační jazyky a knihovny modelů),
- experimentování se simulačními modely (simulátory),
- vizualizaci a vyhodnocování výsledků.

**Poznámka:** V rámci předmětu IMS použijeme SIMLIB/C++, systémy Dymola/OpenModelica a případně SciLab/Octave/Matlab - viz odkazy na WWW IMS

- Metoda simulace
- Použití simulace v různých oborech
- Výhody a problémy
- Základní teoretické souvislosti
- Problém verifikace a validace modelů
- Stručná charakteristika simulačních nástrojů

Přehled:

- Modelování — proces vytváření modelů
  - abstraktní model
  - simulační model
- Klasifikace modelů
- Popis modelů
- Příklady jednoduchých modelů

Způsoby matematického popisu modelů:

- Konečný automat
- Petriho síť
- Turingův stroj
- Algebraické rovnice
- Diferenciální rovnice (obyč. i parciální)
- Diferenční rovnice
- Markovské procesy
- ...

**Poznámka:** Klasifikace abstraktních modelů

Formulace zjednodušeného popisu systému abstrahujícího od všech nedůležitých skutečností vzhledem k *cíli a účelu* modelu.

- Nedovedeme postihnout reálný svět v celé komplikovanosti
- Zajímáme se jen o ohraničené části
- Identifikace vhodných složek systému
- Systém nemusí být definován pouze na reálném objektu — potom vycházíme ze znalostí analogických systémů.

Z hlediska teorie systémů předpokládáme mezi modelovaným systémem a abstraktním modelem homomorfní vztah.

Specifické cíle a účely modelů:

- *Studium chování systému* pro určitá specifická kritéria, zkoumání povahy závislosti mezi parametry a odezvou systému.
- *Predikce* — vyhodnocení chování systému za určitých podmínek.
- *Analýza citlivosti* — určení faktorů (parametrů), které jsou pro činnost systému nejvýznamnější.
- *Optimalizace* — nalezení takové kombinace parametrů, která vede k nejlepší odezvě systému.

Vymezení účelu modelu má významný dopad na celý proces budování abstraktního modelu i na vlastní experimentování se simulačním modelem.

simulační model = abstraktní model zapsaný formou programu

Vztahy mezi modely

**homomorfní vztah:** *modelovaný systém — abstraktní model*  
**izomorfní vztah:** *abstraktní model — simulační model*

**Poznámky:**

- Izomorfní vztah představuje silnější vztah ekvivalence mezi abstraktními systémy — shodnost struktur a chování prvků uvažovaných systémů.
- Konkrétní implementace simulačního modelu závisí na typu modelu a na použitém simulačním nástroji.

Tradiční rozdělení:

- spojité modely
- diskrétní modely
- kombinované modely

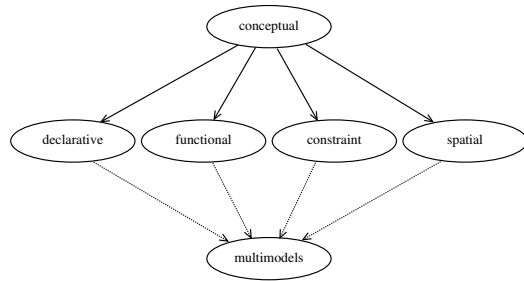
**Poznámka:**

Odpovídající varianty DEVS formalismu: DEVS, DESS, DEVS&DESS

### Klasifikace podle [Fishwick]:

- Konceptuální modely
- Deklarativní modely
- Funkcionální modely
- Modely popsané rovnicemi (*constraint*)
- Prostorové (*spatial*) modely
- Multimodely

**Poznámka:** Multimodel je složen z modelů různého typu.



- Modely, jejichž komponenty (prozatím) nebyly přesně popsány ve smyslu teorie systémů.
- Obvykle se používají v počáteční fázi modelování pro ujasnění souvislostí a komunikaci v týmu.
- Mají formu textu nebo obrázků.

- Popis přechodů mezi stavy systému.
- Model je definován *stavy a událostmi*, které způsobí přechod z jednoho stavu do druhého za jistých podmínek.
- Vhodné především pro diskrétní modely.
- Obvykle zapouzdřeny do objektů (hierarchická struktura).

### Příklady:

- Konečné automaty (deterministické i nedeterministické, Markovovy modely)
- Petriho sítě
- Událostmi řízené systémy s kalendářem

- Grafy zobrazující *funkce a proměnné*.
- Jsou možné 2 modifikace: uzel grafu je funkce nebo proměnná

### Příklady:

- Systémy hromadné obsluhy se zařízeními a frontami ("Queueing systems")
- Bloková schemata (spojitá simulace, ...)
- Kompartimentové systémy
- Grafy signálových toků
- Systémová dynamika

- Rovnice (algebraické, diferenciální, diferenční)
- Neorientované grafy (elektrická schemata, "Bond-graphs")

### Příklady:

- Diferenciální rovnice systému dravec-kořist:

$$\frac{dx_k}{dt} = k_1 x_k - k_2 x_k x_d$$

$$\frac{dx_d}{dt} = k_2 x_k x_d - k_3 x_d$$

- Balistika, kyvadlo, RC obvod, ...
- Chaos (například "Lorenz equation")
- Logistická rovnice  $x \leftarrow ax(1 - x)$

Rozdělují systém na prostorově menší ohraničené podsystémy.

### Příklady:

- Parciální diferenciální rovnice (difúze, proudění, ...)
- Celulární automaty (hra "Life")
- L-systémy
- *N-body problem*: mechanické modely těles + kolize

Modely složené z různých typů modelů, které jsou obvykle heterogenní (popsané různým způsobem).

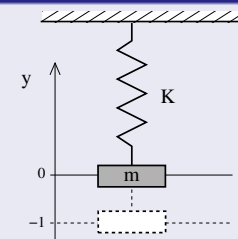
### Příklady:

- Kombinované modely (např. spojité + diskrétní)
- Modely s neurčitostí (např. spojité + fuzzy)
- Modely na různé úrovni abstrakce (kvalitativní + kvantitativní)
- Spojování modelů (FMI, "co-simulation", HLA, ...)
- ...

### Poznámka:

Většina netriviálních modelů spadá do této kategorie.

### Obrázek = konceptuální model



### Diferenciální rovnice = abstraktní model (constraint)

$$y'' = -g - \frac{K}{m}y$$

počáteční podmínky:

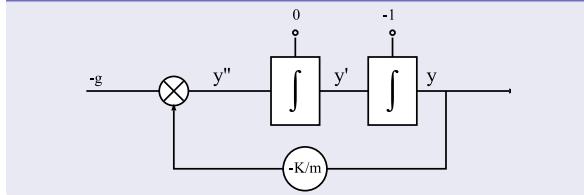
$$y(0) = -1$$

$$y'(0) = 0$$

### Poznámky:

- Počáteční podmínky
- Pozor na shodné jednotky (pozice: metry / stopy ?)

### Blokové schéma = abstraktní model (funkcionální)



### program = simulační model

```
// popis modelu v SIMLIB/C++
struct Model {
    Integrator y, v;
    Model(double m, double K, double y0) :
        v(-g - K/m * y, 0),
        y(v, y0) {}
};

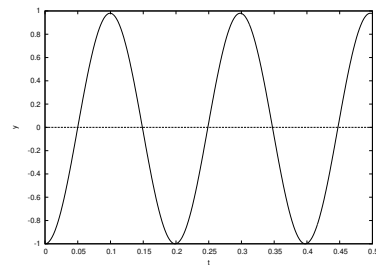
Model s(1, 1e3, -1); // instance modelu s parametry

// vynechán popis simulačního experimentu
```

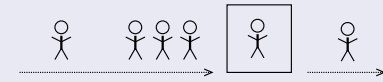
### Výsledky simulace (tabulka):

# čas	y	v
0.000	-1	0
0.001	-0.9995	0.99
0.002	-0.998	1.979
0.003	-0.9955	2.966
0.004	-0.9921	3.95
0.005	-0.9876	4.93
0.006	-0.9822	5.906
0.007	-0.9758	6.875
0.008	-0.9685	7.837
0.009	-0.9602	8.792
0.010	-0.9509	9.738
...		

### Výsledky simulace (graf):

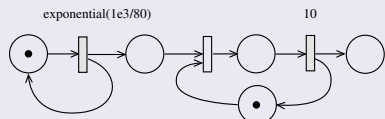


### Obrázek = konceptuální model

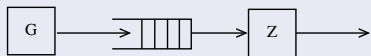


- Zákazníci přicházejí s určitým rozložením pravděpodobnosti,
- jsou obsluhováni zařízením po určitou dobu,
- vytváří se fronta zákazníků.

### Petriho síť = abstraktní model (deklarativní)



### Blokové schéma = abstraktní model (funkcionální)



### program = simulační model:

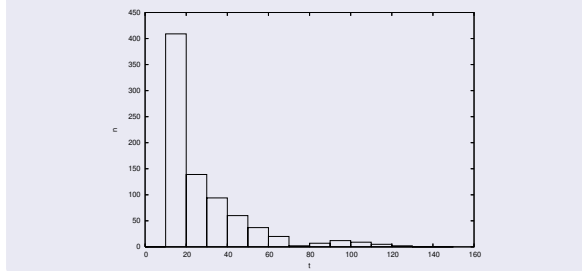
```
Facility Linka("Linka");
class Zakaznik : public Process { // třída zákazníků
void Behavior() { // --- popis chování
    Seize(Linka); // obsazení zařízení
    Wait(10); // obsluha
    Release(Linka); // uvolnění zařízení
}
};
class Generator : public Event { // generátor zák.
void Behavior() { // --- popis chování
    (new Zakaznik)->Activate(); // nový zákazník
    Activate(Time+Exponential(1e3/80)); // interval
}
}; // ... vynechán popis experimentu a sběr statistik
```

### Výsledky simulace:

```
FACILITY Linka
Time interval = 0 - 10000
Number of requests = 797
Average utilization = 0.796405

Input queue 'Linka.Q1'
Maximal length = 12
Average length = 1.37766
Minimal time = 0.00798347
Maximal time = 112.171
Average time = 22.1489
Standard deviation = 31.087
```

### Výsledky simulace: čas strávený v systému (histogram)



- Modely různých typů a úrovní abstrakce
- Jsou možné různé popisy stejného systému
- Často nutné kombinovat = multimodely
- Je výhodné použít objekty (OOP)
- Použití hotových modelů jako komponent
- ...

Vše se odrazí v implementaci nástrojů pro simulaci.

### Možnosti:

- použití obecných jazyků (C, C++, Java, Python, ...)
- simulační knihovny pro obecné jazyky (SIMLIB/C++, SimPy, ...)
- simulační jazyky (Simula67, Modelica, ACSL, ...)
- simulační systémy (OpenModelica, Dymola, ANSYS, PowerDEVS, ...)
- propojování různých nástrojů (HLA, FMI, ...)

### Poznámky:

HLA = *High Level Architecture*, standard pro distribuovanou simulaci  
FMI = *Functional Mockup Interface*

= speciální programovací jazyky

Poskytují prostředky usnadňující efektivní popis:

- struktury modelů (propojení komponent)
- chování modelů (rovnice, algoritmy)
- simulačních experimentů

Výhody:

- jednodušší popis modelu (snadnější verifikace)
- možnost automatické kontroly popisu modelu

Nevýhody:

- další jazyk = překladáč, výuka, údržba
- relativně málo používáno = problémy (cena, chyby)

Klasifikace podle typu modelů:

- diskrétní
- spojité
- kombinované
- ...

Příklady:

- Simula67,
- Simgscript,
- ACSL (Advanced Continuous Simulation Language),
- Modelica, ...

V rámci výuky budeme používat:

- SIMLIB/C++: OO knihovna pro C++ (LGPL)
- DYMOLA/Modelica: komerční program  
OpenModelica: volně dostupné
- (Octave nebo SciLab: integrované prostředí, jazyk pro numerické výpočty, knihovny, různé specializované nadstavby – "toolkity")

Podpůrné nástroje:

- Vizualizace: Gnuplot
- Statistika: GNU R, "diehard" testy
- ...

- Matlab/Simulink
- Sage
- GNU Octave (a OctaveForge)
- Simula67 (cim)
- SciPy, NumPy — Python
- SPICE — elektrické obvody
- GSL = *GNU Scientific Library* — knihovna, ISO C
- ... (další viz WWW)

- Nástrojů pro podporu modelování a simulace existuje velmi mnoho.
- Některé nástroje vyžadují speciální vybavení (superpočítače).
- Většina nástrojů je zaměřena na konkrétní problém/oblast.
- Podrobnější informace o používaných nástrojích budou uvedeny později.

Reklama: Předmět *Simulační nástroje a techniky* v magisterském studiu bude zahrnovat podrobnosti o efektivní implementaci simulačních systémů a pokročilých metodách modelování a simulace.

Obsah:

- Pravděpodobnost, náhodné proměnné, ...
- Rozložení náhodných čísel
- Generování pseudonáhodných čísel
- Transformace rozložených pseudonáhodných čísel
- Testování pseudonáhodných čísel
- Metoda *Monte Carlo*

**Poznámka:**

Předpokládáme základní znalosti z teorie pravděpodobnosti.



- Co je náhodnost? (nedeterminismus, pseudonáhodnost)
- Některé části reality neumíme popsat jinak  $\Rightarrow$  používáme náhodné jevy/procesy
- Každý proces má jiný charakter (a odpovídající rozložení)
- Jde o jeden ze způsobů popisu neurčitosti
- Příklady: příchody zákazníků, doba obsluhy, ...
- Postup:
  - 1 Změříme vzorek procesu v realitě (získáme soubor dat),
  - 2 ten aproximujeme analytickým vyjádřením (typicky pomocí existujícího rozložení),
  - 3 a nakonec náhodný proces modelujeme generátorem pseudonáhodných čísel (s odpovídajícím rozložením a parametry).

- Jev
- Pravděpodobnost jevu
- Náhodná proměnná
- Rozložení pravděpodobnosti
- Distribuční funkce (CDF),
- Funkce hustoty pravděpodobnosti (PDF)
- Střední hodnota (Mean)
- Rozptyl (Variance)
- Zákon velkých čísel
- Centrální limitní věta
- ...

Náhodná proměnná je taková veličina, která jako výsledek pokusu může nabýt nějakou hodnotu, přičemž předem nevíme jakou konkrétně.

Náhodné proměnné rozdělujeme na:

- diskrétní:** nabývají jen konečně nebo spočetně mnoha různých hodnot (Příklad: co padne při hodu kostkou)
- spojité:** hodnoty spojitě vyplňují určitý interval (Příklad: čas mezi příchody zákazníků)

**Poznámka:**

Náhodné proměnné označujeme velkými písmeny, např.  $X$ , a jejich možné hodnoty odpovídajícími malými písmeny, např.  $x_1, x_2$ .

Náhodné veličiny můžeme zadat:

- distribuční funkcí
- rozdělením pravděpodobnosti (např. funkce hustoty)

Existuje celá řada různých používaných rozložení, viz literatura. Například:

McLaughlin M.: *A Compendium of Common Probability Distributions*, 2016

[https://www.causascientia.org/math\\_stat/Dists/Compendium.pdf](https://www.causascientia.org/math_stat/Dists/Compendium.pdf)

určuje vztah mezi možnými hodnotami náhodné veličiny  $x_i$  a jim příslušujícími pravděpodobnostmi  $p_i = P(X = x_i)$ .

Obecně platí:  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Lze definovat například tabulkou pravděpodobností pro všechny možné hodnoty náhodné proměnné:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_N$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_N$

Musí platit:  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$

kde  $N$  je počet možných hodnot

Distribuční funkce náhodné veličiny  $X$  je funkce

$$F(x) = P(X \leq x)$$

kde  $P(X \leq x)$  je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina  $X$  nabude hodnoty menší nebo rovnou zvolenému reálnému číslu  $x$ .

Platí:  $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

**Příklad:** Hod kostkou

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

**Poznámka:** Graf distribuční funkce diskrétní náhodné proměnné je po částech konstantní.

- Distribuční funkce:  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$
- Funkce hustoty pravděpodobnosti:  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Distribuční funkce  $F(x)$  má tyto základní vlastnosti:

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $F(x_1) \leq F(x_2)$  pro  $x_1 < x_2$  (je neklesající)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

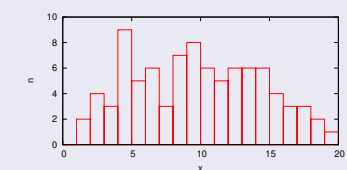
Hustota pravděpodobnosti  $f(x)$  má tyto základní vlastnosti:

- $f(x) \geq 0$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Mějme soubor  $N$  výsledků pokusů.

Histogram  $H$  roztrídí soubor do  $K$  tříd podle vhodně zvolených intervalů. Hodnota  $H(i) =$  počet výsledků v  $i$ -tém intervalu.

**Příklad histogramu pro  $K = 20, N = 100$**



**Poznámky:** Problém stanovení optimálního počtu intervalů. (Histogram se blíží funkci hustoty pravděpodobnosti.)

**Charakteristiky polohy:** posunutí vzhledem k počátku (střed, modus, medián, kvantily).

**Charakteristiky variability:** rozsah kolísání hodnot kolem středu (rozptyl a směrodatná odchylka).

**Charakteristiky šikmosti:** udává nesymetričnost rozložení.

**Charakteristiky špičatosti:** porovnává variabilitu rozložení ve středu a na okrajích.

Charakteristiky lze stanovit podle tzv. momentů.

Je-li  $X$  náhodná veličina s frekvenční funkcí  $p_i$  resp. hustotou pravděpodobnosti  $f(x_i)$ , pak

obecný moment  $k$ -tého řádu je:

$$m_k(X) = \sum_i x_i^k p_i$$

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Příklad: Střední hodnota je moment prvního řádu:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

$$E(X) = m_1(X) = \mu$$

Je-li  $X$  náhodná veličina s  $p_i$  resp.  $f(x_i)$ , pak

centrální moment  $k$ -tého řádu je:

$$M_k(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^k p_i$$

$$M_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^k f(x) dx$$

Příklad: Rozptyl je centrální moment 2. řádu:

$$D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$$

$$D(X) = M_2(X)$$

Šikmost:

$$\beta_1 = \frac{M_3(X)}{\sigma(X)^3}$$

kde  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$  je směrodatná odchylka

Špičatost:

$$\beta_2 = \frac{M_4(X)}{\sigma(X)^4}$$

- Testování náhodných čísel
- Odhady parametrů rozložení
- ...

**Poznámka:**

Konkrétní parametry konkrétního rozložení se projeví v jeho momentech. Z odhadu lze zpětně vyčíslit parametry.

- Diskrétní:
  - Poissonovo
  - Binomické
  - ...
- Spojitá:
  - rovnoměrné (Uniform)
  - exponenciální (Exponential)
  - normální (Normal, Gauss)
  - Pearsonovo ( $\chi^2$ )
  - ...

Diskrétní rozložení

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$E(x) = \lambda, \quad D(x) = \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\lambda} + 3$$

Příklady použití:

- Systémy hromadné obsluhy: počet příchodů zákazníků do obchodu za jednotku času. Souvisí s exponenciálním rozložením (časový interval mezi příchody — počet příchodů za jednotku času).
- Počet hovorů přes telefonní ústřednu za hodinu.
- Počet alfa částic, které vstoupí za daný časový interval do dané oblasti.
- Počet zmetků ve výrobě za 1 měsíc.

Obvykle označujeme  $R(a, b)$ .

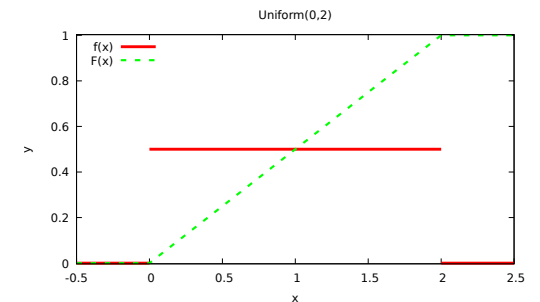
$$F(x) = 0 \quad \text{pro } x \leq a, \quad \frac{x-a}{b-a} \quad \text{pro } a \leq x \leq b, \quad \text{jinak } 1$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{pro } x \in (a, b), \quad \text{jinak } 0$$

V normované formě  $R(0, 1)$  je základem pro generování dalších rozložení.

Charakteristiky:

- Střední hodnota:  $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Rozptyl:  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$



$$f(x) = \frac{1}{A} e^{-\frac{1}{A}(x-x_0)} \text{ pro } x \geq x_0, \text{ jinak } 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{A}(x-x_0)} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

kde  $A$  a  $x_0$  jsou parametry.

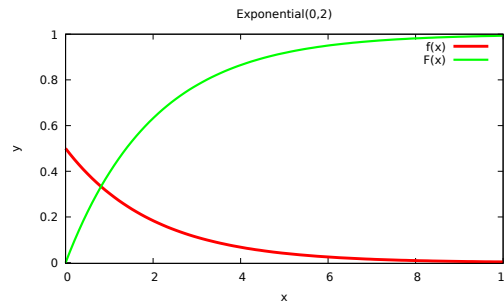
Často se používá normované rozložení s  $x_0 = 0$ .

- Střední hodnota:  $E(X) = x_0 + A$
- Rozptyl:  $D(X) = A^2$

### Poznámka:

V literatuře se často používá jako parametr  $\lambda = \frac{1}{A}$  ("rate").

Použití: rozložení dob obsluhy, časové intervaly mezi poruchami nebo mezi příchody požadavků.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

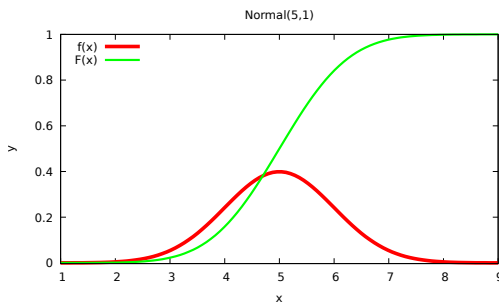
Parametry:

- Střední hodnota:  $\mu$
- Rozptyl:  $\sigma^2$  (směrodatná odchylka:  $\sigma$ )

Pravidlo tří sigma:

$$P(X \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)) \geq 0.99$$

Použití: Odpovídá jevům s vlivem většího počtu nezávislých faktorů.



Založeno na normálním rozložení s parametry  $\mu = 0, \sigma = 1$ .

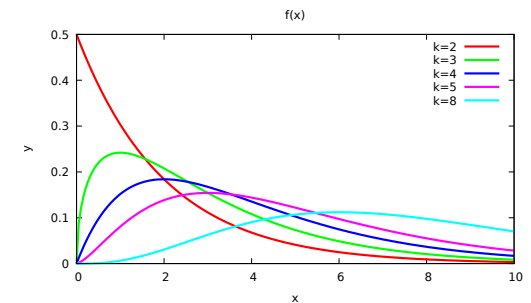
$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^k X_i^2, \quad X_i \text{ je z } N(0, 1)$$

$k$  - počet stupňů volnosti (nemělo by přesáhnout 50, protože pak výsledek konverguje k 1).

$$f(x) = (x)^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

Charakteristiky:  $E(\chi_k^2) = k, D(\chi_k^2) = 2k$

Použití: Testování statistických hypotéz.



- základem je kvalitní generátor rovnoměrného rozložení
- transformací (rovnoměrného rozložení) získáme soubor čísel jiného rozložení

### Problém:

Náhodná × Pseudonáhodná čísla

Generátory:

- Fyzikální zdroje náhodnosti: opravdu náhodné (nedeterministické), generují jen málo bitů za sekundu
- Algoritmické generátory: pseudonáhodné (deterministické), generují řádově miliardy bitů za sekundu

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \bmod m$$

kde konstantní parametry  $a, b$  a  $m$  (multiplikační, aditivní, modul) musí mít vhodné hodnoty

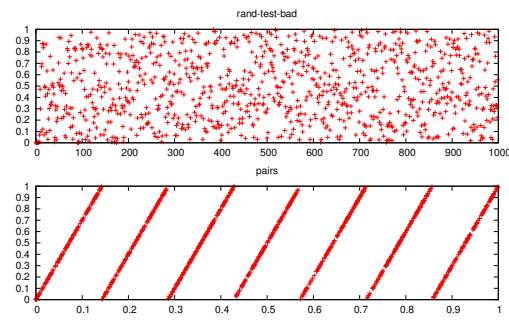
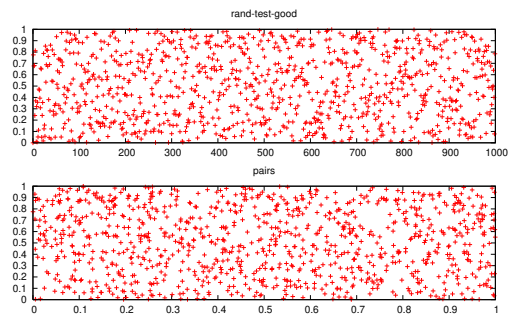
- Generují *rovnoměrné rozložení*  $(0, m)$
- Rozsah  $(0, m)$  se převádí na normovaný  $(0, 1)$
- Generují periodicky se opakující posloupnost čísel. *Perioda generátoru* je maximálně  $m$  a závisí na parametrech.
- Dvě po sobě generovaná čísla nejsou statisticky nezávislá.

Jednoduchý generátor (32 bitů), rozsah  $(0, 1)$

```
static uint32_t ix = SEED; // počáteční hodnota, 32b
double Random(void) {
    ix = ix * 69069u + 1u; // mod 2^32 je implicitní
    return ix / ((double)UINT32_MAX + 1.0);
}
```

**Poznámky:** Nepříliš kvalitní (závislost dvojic, krátká perioda). Pro generování malých čísel nikdy nepoužívejte operaci modulo (např.  $1 + (ix \% 6)$  pro hody kostkou je nevhodné, vždy použijte  $1 + (\text{int})(\text{Random}()*6)$ ).

```
class Kongr {
    unsigned ix; // stav generátoru
public:
    Kongr(unsigned seed = SEED) : ix(seed) {}
    // základní generátor <0,UINT_MAX)
    unsigned next() {
        ix = ix * A + B; // implicitně modulo
        return ix;
    }
    // mapováno na rozsah <0,1)
    double nextDouble() {
        return next()/(UINT_MAX+1.0);
    }
} generator1; // použití: generator1.next()
```



- Mersenne twister (perioda  $2^{19937} - 1$ )
- Xorshift
- různé další varianty LCG (Linear Congruential Generator)
- bitové operace, carry — LFSR (Linear Feedback Shift Register)
- ...

Požadavky na generátory:

- rovnoměrnost rozložení
- statistická nezávislost generované posloupnosti
- co nejdelší perioda
- rychlost

```
// Zdroj: Marsaglia: "Xorshift RNGs"
// stav musí být inicializován (SEED!=0)
uint64_t xorshift64(uint64_t *state)
{
    uint64_t x = *state;
    x ^= x << 13;
    x ^= x >> 7;
    x ^= x << 17;
    return (*state = x);
}
```

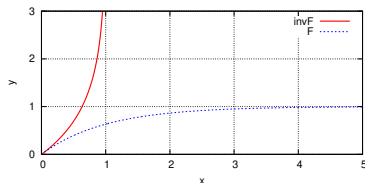
**Poznámky:** Dovoluje použít více různých stavů, například pro vlákna. Existují varianty pro 32, 64, 128 i více bitů ve stavu.

Metody:

- Inverzní transformace — používá inverzní distribuční funkci cílového rozložení. Pro některá rozložení nelze použít (např. když distribuční funkci nelze vyjádřit elementárními funkcemi).
- Vylučovací — sérií pokusů hledáme číslo, které vyhovuje funkci hustoty cílového rozložení. Nevhodná pro neomezená rozložení.
- Kompoziční — složitou funkci hustoty rozložíme na několik jednodušších (intervalů, na každý lze použít jinou metodu).
- Jiná, specificky vytvořená pro dané rozložení.

- 1 Inverze distribuční funkce:  $F^{-1}$
- 2 Generování  $x = Uniform(0, 1)$
- 3 Výsledek:  $y = F^{-1}(x)$

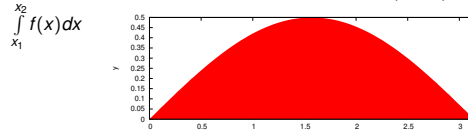
**Příklad:** Exponenciální rozložení  $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-x_0}{A}}$   
 $y = x_0 - A * \ln(1 - x)$  viz. obrázek pro  $x_0 = 0, A = 1$



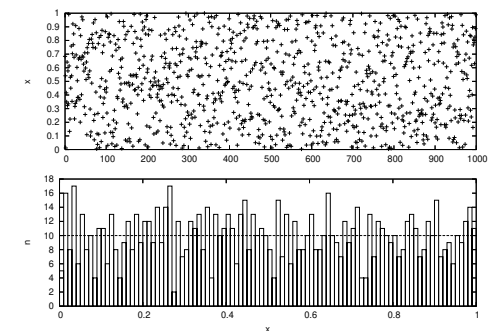
Náhodnou veličinu  $\xi$  s funkcí hustoty  $f(x), x \in (x_1, x_2), f(x) \in (0, M)$  (kde  $M$  je max. hodnota  $f(x)$ ) generujeme takto:

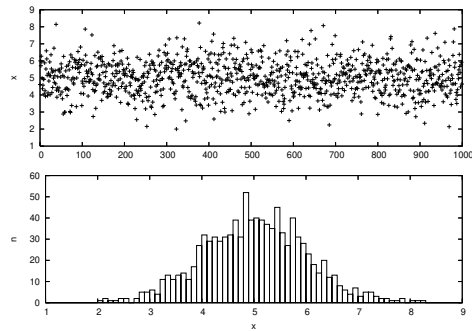
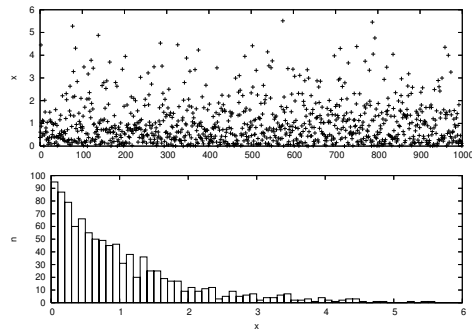
- 1  $x = Uniform(x_1, x_2)$
- 2  $y = Uniform(0, M)$
- 3 je-li  $y < f(x)$ , pak  $x$  prohlásíme za hodnotu náhodné veličiny  $\xi$  jinak goto 1

Efektivita generátoru souvisí s poměrem ploch  $(x_1, x_2) \times (0, M)$  a



**Poznámka:** Nehodí se na neomezená rozložení.





Máme soubor (pseudo)náhodných čísel a chceme:

- Potvrdit hypotézu jeho příslušnosti k danému rozložení.
- Nalézt jeho rozložení (případně nejvíce podobné).
- Nalézt takové parametry rozložení, aby vzorek odpovídal danému rozložení s těmito parametry.

Existuje mnoho statistických testů a nástrojů pro testování náhodných čísel (např. programy *diehard*, *dieharder*)

**Poznámka:** náročné, problém interpretace výsledků

Příklad testování generátoru náhodné veličiny:

- 1 Vygenerujeme soubor  $n$  vzorků (např.  $n = 10000$ ).
- 2 Vypočteme histogram souboru  $H$  (pro  $k$ -kategorii).
- 3 Vypočteme teoretický (analytický) histogram rozložení  $h$ .
- 4 Výpočet: 
$$\chi^2_{k-1} = \sum_{j=1}^k \frac{(H_j - h_j)^2}{h_j}$$
- 5 Výsledek testu zhodnotíme na základě tabulky  $\chi^2$ :
  - zvolená hladina významnosti  $p$  (např. 0.05),  $x_p$  je kvantil rozložení pro počet stupňů volnosti  $k - 1$
  - je-li  $\chi^2_{k-1} > x_p$ , pak generátor nevyhovuje

Přesnější popis viz literatura

- testy rovnoměrnosti rozložení ( $\chi^2$ )
- rovnoměrnost dvojic/trojic
- rovnoměrnost maxima z  $n$  členů
- testy náhodnosti
- test na intervaly, test sběratele kuponů
- poker test (celočíslný,  $0 \leq x_j < d$ )
- Hammingův test
- ...

**Poznámka:** Testování transformovaných rozložení

Experimentální numerická (simulační) metoda (metody):

- řeší danou úlohu experimentováním se stochastickým modelem
- využívá vzájemného vztahu mezi hledanými veličinami a pravděpodobnostmi, se kterými nastanou určité jevy
- vyžaduje generování (pseudo)náhodných čísel
- není příliš přesná
- existuje řada variant (*Metropolis*, *Quasi-MC*)

Postup:

- 1 vytvoříme stochastický model
- 2 provádíme náhodné experimenty
- 3 získanou pravděpodobnost nebo průměr použijeme pro výpočet výsledku

- Historie: Buffonova úloha ( $\pi$ ), projekt "Manhattan"
- Výpočet určitých integrálů
  - molekulární simulace (3N-rozměrný integrál)
  - počítačová grafika (*Path tracing*)
  - kontrola složení (např. salámu)
- Řešení diferenciálních rovnic (náhodné procházky)
- Finance

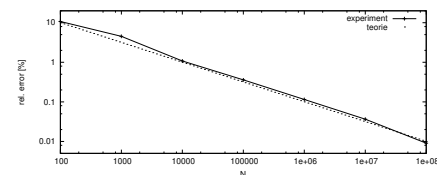
Souvislosti: náhodné vzorkování, průzkumy, *oversampling*, některé optimalizační metody (např. *Simulované žihání*), ...

Přesnost metody není velká — pro relativní chybu platí:

$$err = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

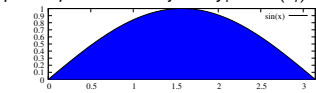
kde  $N$  je počet provedených experimentů.

**Příklad:** Experiment — závislost chyby na počtu pokusů



$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

- 1 Generujeme  $N$  náhodných bodů  $(x_i, y_i)$  (rovnoměrně v rozsahu souřadnic: *rozsah<sub>x</sub>* =  $(0, \pi)$ , *rozsah<sub>y</sub>* =  $(0, 1)$ )
- 2 Vypočteme *pravděpodobnost P* jevu  $y_i < \sin(x_i)$



- 3 Výsledek je přibližně roven  $|rozsah_x| * |rozsah_y| * P$ :

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx \approx \pi P$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

Rychlejší a korektnější postup:

- 1 Generujeme  $N$  náhodných hodnot:  $x_i \in (0, \pi)$
- 2 Vypočteme průměr:  $E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(x_i)$
- 3 Výsledek:  $\int_0^{\pi} \sin(x) dx \approx \pi E$

Lze dokázat, že pro  $N \rightarrow \infty$  platí rovnost:  $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \pi E$

**Poznámka:** Nemusíme znát obor hodnot funkce.

Výpočet objemu koule o poloměru  $r$ :

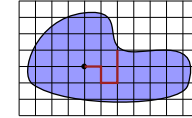
- Generujeme  $N$  náhodných bodů  $(x_i, y_i, z_i)$ .  
Pro zjednodušení použijeme jako těleso kouli a pro všechny osy jen rozsah  $(0, r)$ , který odpovídá  $\frac{1}{8}$  koule.
- Vypočteme pravděpodobnost  $P$  jevu  $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 < r^2$
- Výsledek:  $objem \approx 8Pr^3$

**Poznámka:**

Metoda Monte Carlo je výhodná především pro vícerozměrné integrály, kdy běžné metody nejsou efektivní. Uvedené jednoduché příklady proto považujte pouze za ilustrační.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

+ okrajové podmínky na hranici  $\Gamma$ :  $u(Q) = f(Q)$ ,  $Q \in \Gamma$



Postup řešení:

- 1 Volba čtvercové sítě, aproximace okrajů.
- 2 Provádíme náhodné procházky z výchozího bodu k okraji.
- 3 Průměrná hodnota koncových bodů náhodných procházek udává přibližnou hodnotu řešení  $u(x, y)$  ve výchozím bodu.

- Velmi používaná metoda v případech, kdy běžné numerické metody jsou neefektivní nebo nepoužitelné (např. N-rozměrné integrály pro velké N).
- Jednoduchá implementace.
- Náročnost na kvalitu generátoru pseudonáhodných čísel.
- Relativně malá přesnost, nízká efektivita.
- Existují různé další varianty MC metod — viz literatura.

Agenda:

- Popis diskrétních systémů
- Systémy hromadné obsluhy (*Queueing Systems*)
  - Aktivní entity: procesy, události
  - Pasivní entity: fronty, zařízení, sklady,
- Příklady: Petriho sítě
- Implementace: Algoritmus řízení simulace, kalendář
- "next-event" simulace
- Nástroje pro sběr statistik
- Základní popis SIMLIB/C++
- Příklady: SIMLIB/C++

- Program v (simulačním) programovacím jazyce
- Petriho sítě (C. A. Petri, 1962, existují různé varianty)
- DEVS (*Discrete Event System Specification*)
- Automaty, sítě automatů
- Procesní algebry (CCS, CSP, ...)
- $\pi$ -calculus
- CHAM, PRAM
- ...

V diskrétním modelování používáme pojem *proces*:

- Proces je posloupnost událostí
- Paralelní procesy — současně prováděné procesy
- Kvaziparalelismus — provádění "paralelních" procesů na jednoprocessorovém počítači

V modelovaných systémech často existuje mnoho paralelně probíhajících a vzájemně komunikujících procesů.

**Poznámky:**

- nepreemptivní implementace (např. *coroutines*)
- zapouzdření, objekty, agenti

- Popis jednotlivých procesů sekvencí kroků (program).
- Popis komunikace procesů — zprávy (synchronní, asynchronní).
- Synchronizace při používání sdílených prostředků.

Definice P/T Petriho sítě:

$$\Sigma = (P, T, F, W, C, M_0)$$

kde:

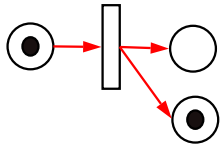
- $P$  je množina míst (stavy)
- $T$  je množina přechodů,  $P \cap T = \emptyset$
- Incidenční relace  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Váhová funkce  $W : F \rightarrow \{1, 2, \dots\}$
- Kapacity míst  $C : P \rightarrow \mathbb{N}$
- Počáteční značení  $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$   
( $M$  se nazývá *značení* Petriho sítě)

## Graf Petriho sítě

Obvykle zadáváme Petriho síť formou grafu:

- Místa – kružnice
- Přechody – obdélníky
- Incidenční relace – šipky (orientované hrany)
- Váhová funkce – ohodnocení hran

Příklad:



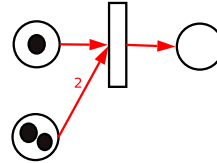
## Chování Petriho sítě

Proveditelnost přechodu v Petriho síti:

Přechod je proveditelný při značení  $M$ , jestliže:

- ve vstupních místech čeká dostatek procesů
- a současně výstupní místa mají dostatečně volnou kapacitu.

Příklad:



## Petriho síť v modelování

Petriho síť mohou modelovat:

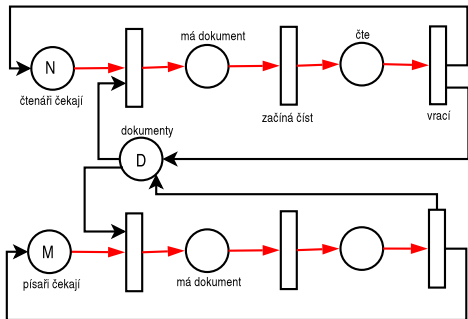
- paralelismus procesů
- komunikaci a synchronizaci procesů
- nedeterminismus

Pro modelování diskrétních systémů zavádíme do klasických P/T Petriho sítí několik rozšíření: priority, pravděpodobnosti a doby přechodů.

Další typy Petriho sítí

- Hierarchické – do sebe vnořené sítě
- Barvené – značky mají datový typ ("barvu")
- Objektově orientované – OOPN, PNTalk
- Stochastické – P/T síť s prioritami, pravděpodobnostmi a časováním přechodů.
- ...

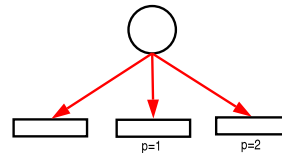
## Příklad: čtenáři a písaři



## Prioritní přechody

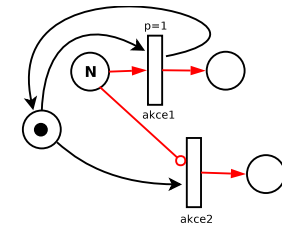
- je-li více přechodů proveditelných z jednoho značení, můžeme jim dát priority
- $p_t \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- vyšší číslo  $\Rightarrow$  vyšší priorita
- implicitně je priorita  $p_t = 0$

Příklad:

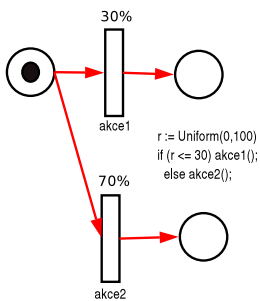


## Poznámka: Inhibiční hrany

```
while ( N > 0 ) {
    akce1();
    N = N - 1;
}
akce2();
```



## Pravděpodobnost provedení přechodu

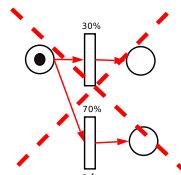


## Pravidla používání rozšířených přechodů

- Přechod má pouze JEDEN parametr (priorita, pravděpodobnost, časování).
- Pozor: tento parametr NENÍ parametrem HRANY.

Příklad – CHYBNĚ

Nejednoznačnost – přechod se provede s pravděpodobností 70%, ale prioritně = NESMYSL!

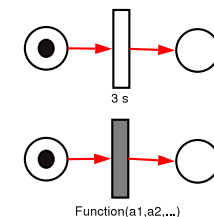


## Časované Petriho síť

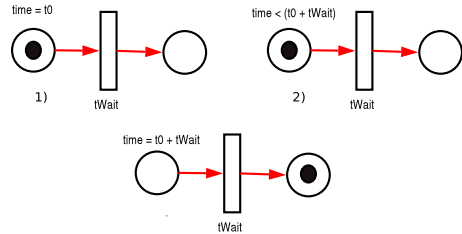
Přidání modelového času:

Časovaný přechod má parametr – dobu provádění:

- Konstantní čas čekání
- Náhodně generovaná doba čekání



- Pokud je přechod v čase  $t$  proveditelný, spustí se odpočet času
- Po celou dobu odpočítávání se nemění stav značek
- Na konci doby se provede přemístění značek



Běžný časovaný přechod neomezuje počet současně čekajících.

Někdy ale zavádíme kapacitu časovaného přechodu:

Kapacita přechodu udává kolik procesů může na přechodu čekat současně:

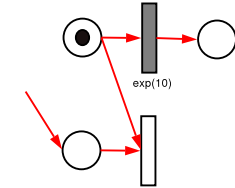
- jeden (implicitně), vzniká fronta
- více (nutno specifikovat poznámkou u přechodu)

### Poznámka:

Poznámka k sémantice časového přechodu: lze řešit i dočasným odstraněním značek na dobu odpočítávání času, ale to komplikuje další případy, jako je například přerušení čekání.

V SPN platí:

- Máme dva druhy přechodů: časované a okamžité
- Jediným povoleným parametrem časovaného přechodu je údaj o čase (náhodný nebo konstantní)
- Parametry okamžitého přechodu: priorita, pravděpodobnost
- Okamžitý přechod má vždy vyšší prioritu než časovaný



SHO (*Queueing Systems*) jsou systémy obsahující zařízení (s frontami), která poskytují obsluhu transakcím.

### Typický SHO obsahuje:

- transakce (=procesy) a popis jejich příchodů
- obslužné linky (více typů) a popis obsluhy
- fronty různých typů ve kterých transakce čekají

Co sledujeme při simulaci:

- informace o čase stráveném transakcí v systému
- doby čekání ve frontách
- vytížení obslužných linek

Cíl: odhalit různá zdržení, optimalizovat výkon, ...

Obvykle jde o stochastický proces příchodů do systému

- Při modelování příchodů zadáváme:
    - Střední dobu mezi příchody (obvykle používáme exponenciální rozložení)
    - Počet příchodů za jednotku času (obvykle Poissonovo rozložení)
- Pojem: Intenzita příchodů požadavků

Vytvoří se vždy, když požadavek chce být obslužen již obsazeným zařízením. Pro fronty je charakteristické:

- řazení požadavků ve frontě (např. FIFO)
- způsob výběru požadavků z fronty
- největší možná délka fronty

**Frontové řády** : FIFO, LIFO, SIRO (Service in Random Order)

**Nulová fronta** : požadavek nemůže vstoupit do fronty, jde o systém se ztrátami

**Fronta konečná** : omezení kapacity fronty

**Fronta s netrpělivými požadavky** : netrpělivý požadavek opouští systém, překročí-li doba čekání určitou mez (*time-out*)

- Přicházející požadavky nejsou rovnocenné – požadavek na obsluhu může mít zvláštní prioritu.
- Prioritních úrovní může být více.
- U jedné obslužné linky lze vytvářet i několik front s různými prioritami.
- Vstupem požadavku s vyšší prioritou nastane jedna ze čtyř možností pro právě probíhající obsluhu požadavku s nižší prioritou – viz dále.

- 1 Započatá obsluha se normálně ukončí (slabá priorita).
- 2 Obsluha se přeruší a začne obsluha požadavku s vyšší prioritou obsluhy (silná priorita). Požadavek, jehož obsluha byla přerušena:
  - odchází ze systému neobsloužen
  - nebo se vrací znovu do fronty a když je později znovu obsluhován, tak:
    - obsluha pokračuje od přerušenoého místa,
    - nebo začíná znovu od začátku.
- 3 Jsou-li všechny linky obsazeny a u každé je fronta, požadavek se sám rozhodne, do které fronty se zařadí.
- 4 Vytvářejí-li požadavky jednu společnou frontu, požadavek vstupuje do té obslužné linky, která se nejdříve uvolní.

Vznikne spojením několika obslužných linek.

**Otevřená obslužná síť** – výměna požadavků mezi sítí a okolím.

**Uzavřená obslužná síť** – nedochází k výměně požadavků mezi sítí a okolím.

**Smišená obslužná síť** – pro některé typy požadavků je síť otevřená, pro jiné uzavřená.



Statické vlastnosti sítě jsou definovány:

- počtem a charakteristikou obslužných linek,
- topologií obslužné sítě.

Dynamické vlastnosti obslužné sítě jsou definovány:

- charakteristikou procesu příchodu požadavků
- charakteristikou procesu obsluhy požadavků
- charakteristikou procesu přechodu požadavků mezi obslužnými linkami
- strategií obsluhy požadavků v obslužných linkách sítě.

Standard stručného a přehledného vyjádření typu SHO (zavedl ji D. G. Kendall) – používá tři hlavní hlediska:

- **X** – typ stochastického procesu popisujícího příchod požadavků k obsluze
- **Y** – zákon rozložení délky obsluhy
- **c** – počet dostupných obslužných linek

Specifikace má tvar **X/Y/c**, kde:

- **X, Y** ... velká písmena *M, D, G, E<sub>k</sub>, K<sub>n</sub>, GI* – viz dále
- **c** ... přirozené číslo, včetně ∞

**Příklad:**  
systém M/M/1

Symbol	X	Y
M	Poissonův proces příchodů tj. exponenciální rozložení vzájemně nezávislých intervalů mezi příchody	exponenciální rozložení doby obsluhy
$E_k$	Erlangovo rozložení intervalů mezi příchody s parametry $\lambda$ a $k$	Erlangovo rozložení doby obsluhy s parametry $\lambda$ a $k$
$K_n$	rozložení $\chi^2$ intervalů mezi příchody, nstupňův volnosti	rozložení $\chi^2$ doby obsluhy
D	pravidelné deterministické příchody	konstantní doba obsluhy
G	žádné předpoklady o procesu příchodu	jakékoliv rozložení doby obsluhy
GI	rekurentní proces příchodů	

Při modelování SHO popisujeme:

- Procesy (transakce) v systému (příchod procesu do systému, jeho činnost, odchod)
- Stav obslužných linek a front u zařízení
- Průběh obsluhy transakcí v zařízeních

### Poznámka

Aproximace trvání doby obsluhy exponenciálním rozložením pravděpodobnosti přináší podstatné zjednodušení. Předpokládáme, že pravděpodobnost ukončení obsluhy v průběhu krátkého časového intervalu je konstantní a nezávislá na tom, jak dlouho již obsluha probíhala.

Podle kapacity rozlišujeme:

- kapacita = 1* Zařízení (*Facility*)
- kapacita > 1* Sklad (*Store*)

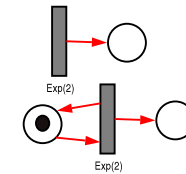
Modelujeme-li více zařízení stejného typu, pak:

- každé zařízení má vlastní frontu → pole zařízení
- k zařízením vede jediná fronta → sklad nebo pole zařízení se sdílenou frontou

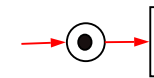
**Příklad:** Samoobsluha

- vozíky – sklad  $x$  vozíků (jedna fronta)
- dva prodavači – např. dvě zařízení se sdílenou frontou
- pět pokladen – pět samostatných zařízení (ke každé je zvláštní fronta)

Generování příchodu transakcí (procesů) do systému:



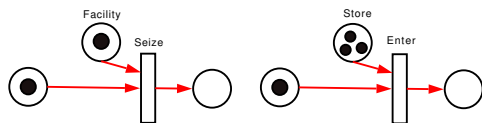
Transakce opouští systém:



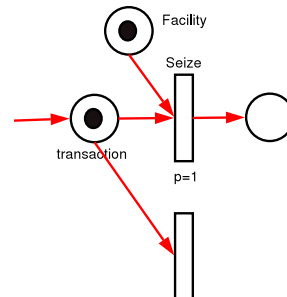
Obslužná linka s kapacitou 1 (Zařízení, Facility) je volná nebo obsazená.

Obslužná linka s kapacitou  $N > 1$  (Sklad, Store) má obsazeno 0 až  $N$  míst.

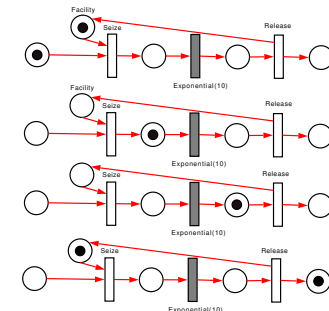
**Příklad:** Obsazení zařízení (Seize) a skladu (Enter)



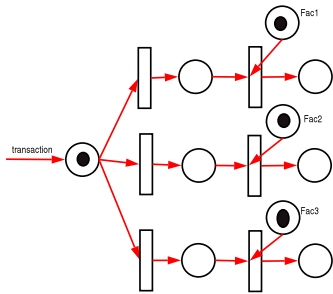
Transakce přistupuje k zařízení, ale nechce čekat ve frontě:



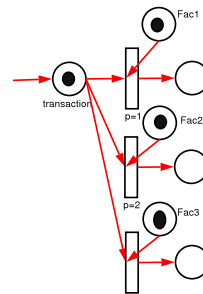
Obsazení linky, vykonání obsluhy a uvolnění linky



Transakce náhodně vybírá jedno ze zařízení



Transakce přistupuje prioritně k jednomu ze zařízení

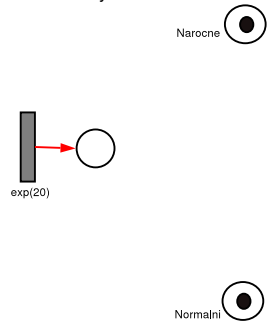


Do opravářské dílny přicházejí zákazníci v intervalech daných exponenciálním rozložením pravděpodobnosti se střední hodnotou 20 minut.

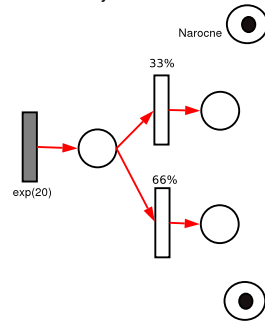
V dílně jsou dva opraváři: jeden zpracovává normální zakázky a druhý náročné zakázky. Každá třetí zakázka je náročná. Vyřízení normální zakázky trvá 15 minut s exp. rozložením pravděpodobnosti, vyřízení náročné zakázky zabere 45 minut exp. Zákazník čeká na vyřízení své zakázky a pak systém opouští.

Modelujte systém pomocí stochastické Petriho sítě.

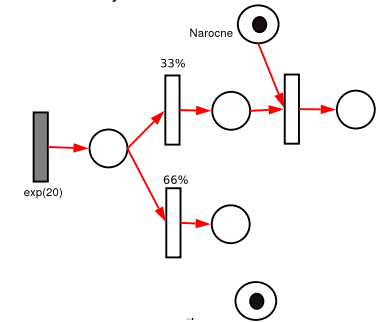
Struktura systému:



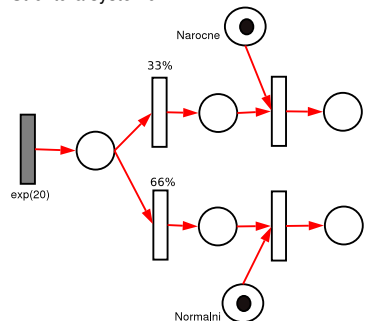
Struktura systému:



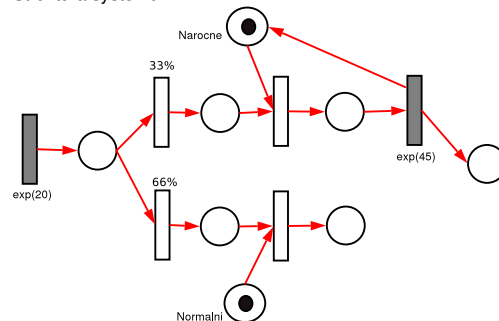
Struktura systému:



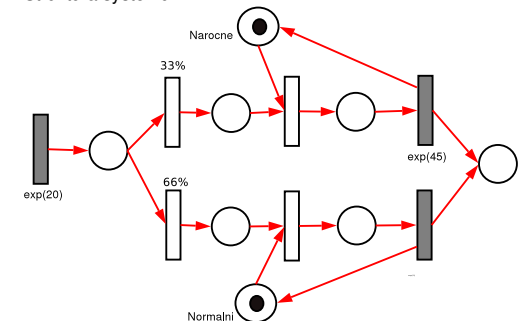
Struktura systému:



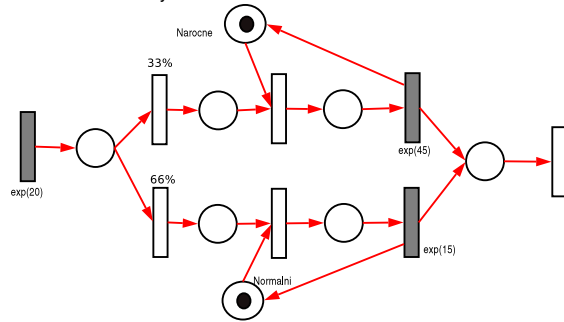
Struktura systému:



Struktura systému:



Model zadaného systému ve formě stochastické Petriho sítě:



```

Facility narocne("Narocne");
Facility normalni("Normalni");

class Zakaznik : public Process {
    void Behavior() {
        if (Uniform(0,100) <= 33) {
            Seize(narocne); // obsazení zařízení
            Wait(Exponential(45));
            Release(narocne); // uvolnění
        } else {
            ...
        }
    }
};
    
```

```

class Generator : public Event {
    void Behavior() {
        (new Zakaznik)->Activate();
        Activate(Time + Exponential(20));
    }
};

int main() // popis experimentu
{
    Init(0, 1000); // doba simulace
    (new Generator)->Activate();
    Run(); // start simulace
}
    
```

### Prostředky pro diskrétní modelování:

- Process – báze pro modelování procesů
- Event – báze pro modely událostí
- Facility – obslužná linka – výlučný přístup
- Store – obslužná linka s kapacitou
- Queue – fronta
- Statistiky – sada tříd pro sběr a uchování statistik

**Poznámka:** Podrobnosti viz WWW dokumentace

```

#include "simlib.h"

<deklarace zařízení>

<deklarace tříd - procesy, události>

<popis simulačního experimentu>

Simulační model v SIMLIB/C++ je program v jazyce C++. Všechny konstrukce/knihovny jazyka C++ jsou tedy použitelné.
    
```

```

int main() {
    <příkazy1> // základní inicializace
                // například SetOutput("soubor");
    Init(<počáteční čas>, <koncový čas>);
                // inicializace simulátoru a m. času
    <příkazy2> // inicializace modelu
                // například vytvoření objektů
    Run(); // běh simulace
    <příkazy3> // zpracování výsledků
                // například tisk statistik
}

Sekvenci Init(t0,t1); ...; Run(); ...; lze libovolně opakovat.
    
```

Modelový čas je reprezentován proměnnou:

```
double Time;
```

Do proměnné Time nelze zapisovat přiřazovacím příkazem. Zapis:

```
Time = 10;
```

vyvolá chybu při překladu.

Posun času řídí výhradně jádro simulátoru.

Init(t0,t1); nastaví počáteční čas na t0.

```

double Random();
-- rovnoměrné rozložení, R(0,1)

double Uniform(double L, double H);
-- rovnoměrné rozložení, R(L,H)

double Exponential(double E);
-- exponenciální rozložení se středem E

double Normal(double M, double S);
-- normální rozložení se středem M a rozptylem S

...
    
```

OOP – třídy a instance (objekty)

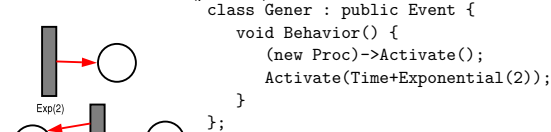
- OOP vzniklo pro účely modelování a simulace (Simula 67)
- Abstrakce, hierarchie, zapouzdření, modularita; paralelnost, typování, perzistence a souvislosti (více v přednášce o simulačních jazycích)

Událost je jednorázová (nepřerušitelná) akce provedená v určitém modelovém čase. V SIMLIB je vždy odvozena od abstraktní třídy Event (musíme definovat metodu Behavior()).

Často jsou nutné periodické události — událost naplňuje sama sebe:

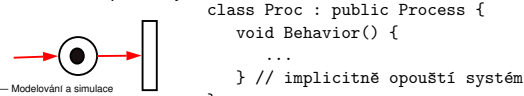
```
class Udalost : public Event {
    void Behavior() {
        // ... příkazy události
        Activate(Time + e); // periodicky aktivovat
    }
};
// Plánování události:
(new Udalost)->Activate(); // plánuje na čas Time
(new Udalost)->Activate(t); // čas t (pozor na t<Time)
```

Generování transakcí (procesů):



```
class Gener : public Event {
    void Behavior() {
        (new Proc)->Activate();
        Activate(Time+Exponential(2));
    }
};
int main() {
    Init(t0, t1);
    (new Gener)->Activate();
}
```

Transakce opouští systém:



```
class Proc : public Process {
    void Behavior() {
        ...
    } // implicitně opouští systém
}
```

Procesy (transakce) jsou odvozeny z abstraktní třídy Process.

```
class Transakce : public Process {
public:
    Transakce( parametry ) { // konstruktor
        // nepovinný popis inicializace procesu
    }
    void Behavior() {
        // popis chování procesu
    }
};
```

Po aktivaci procesu se volá metoda Behavior (chování). Provedení metody je přerušeno při čekání:

- ve frontě u zařízení (v rámci Seize, Enter)
- při explicitním wait(dt); (abstrakce nějaké činnosti trvající dt)

Proces se provádí jako posloupnost událostí – např.:

```
void Behavior() {
    ...
    Wait(3);
    ... // pokračování
}
```

Proces čeká 3 časové jednotky.

Při simulaci to znamená, že se naplňuje další jeho pokračování na čas  $Time + 3$  (příkazem Activate(Time+3)).

Aktivační záznam této události je uložen do kalendáře a proces je přerušen (a spustí se první plánovaná akce v kalendáři).

**Poznámka:** Passivate() — pozastaví na neurčito.

Kalendář je uspořádaná datová struktura uchovávající aktivační záznamy budoucích událostí.

- Každá naplánovaná budoucí událost ("next event") má v kalendáři záznam  $[(acttime_i, priority_i, event_i), \dots]$
- Kalendář umožňuje výběr prvního záznamu s nejmenším aktivačním časem a vkládání/rušení aktivačních záznamů.

Algoritmus řízení diskretní simulace typu "next-event"

```
Inicializace času, kalendáře, modelu, ...
while( Kalendář je neprázdný ) {
    Vyjmi první záznam z kalendáře
    if ( Aktivační čas události > T_END )
        Konec simulace
    Nastav čas na aktivační čas události
    Proveď popis chování události
}
```

Při simulaci v jednom okamžiku běží jen jeden proces (Process::Behavior()). Ostatní jsou pozastaveny — čekají ve frontách nebo jsou registrovány v kalendáři (Pending Event Set, PES).

Proto nemůže být aktivní proces nedobrovolně přerušen a v době svého běhu má teoreticky neomezený přístup ke všem zdrojům (proměnným programů).

Provedení procesu je přerušeno až na jeho vlastní žádost (viz tzv. kooperativní multitasking).

**Poznámka:**

Implementace přepínání procesů v SIMLIB/C++.

Vytvoření instance třídy:

```
Transakce *t = new Transakce;
```

Plánování (re)aktivace procesu do kalendáře:

```
t->Activate(tm);
```

Aktivuje se v čase  $tm$  (implicitně je to  $tm = Time$ , tj. okamžitě).

Zrušení procesu i jeho registrace ve všech strukturách (fronty, kalendář):

```
t->Cancel(); // také lze použít delete t;
```

Suspendování běžícího procesu:

```
Passivate();
```

Pro události lze použít pouze Activate a Cancel.

```
class Timeout : public Event {
    Process *Id;
public:
    Timeout(Process *p, double dt): Id(p) {
        Activate(Time+dt); // kdy bude
    }
    void Behavior() {
        Id->Cancel(); // zrušení procesu ...
        Cancel(); // a zrušení této události
    }
};
class MProc : public Process {
    void Behavior() {
        Timeout *t = new Timeout(this, 10);
        Seize(F); // možné čekání ve frontě
        delete t; // jen když nebyl timeout
        ...
    }
};
```

Explicitní: pozastavení procesu příkazem Wait(expr) — do kalendáře naplňuje událost reaktivace procesu na čas  $Time + expr$ .

Implicitní: proces může čekat ve frontě po dobu neurčitou (např. při přístupu k zařízením typu Facility a Store):

```
Facility F("F");
Store S("S",100); // kapacita 100 míst
```

```
Seize(F); // před obsazením může čekat ve frontě
Wait(5); // F "pracuje" 5 čas. jednotek
Release(F); // uvolní zařízení
```

```
Enter(S, 3); // zabere 3 místa ve skladu nebo čeká
Wait(50); // ...
Leave(S, 1); // uvolní 1 místo
```

Proces má atribut Priority, který ovlivňuje jeho řazení do front.

```
class MProc : public Process {
    // ...
public:
    MProc() : Process( PRIORITA1 ) { };
    void Behavior() {
        Priority = 3; // změna priority
        Seize(F);
        Priority = 0; // = implicitní priorita
    }
};
```

**Poznámka:**  
Neplést s prioritou obsluhy při obsazování zařízení!

```
Queue q;
...
void Behavior() { // popis chování procesu
    q.Insert(this); // vloží se do fronty
    Passivate(); // suspenduje se
    ...
}
```

Jiný proces (nebo událost) může z fronty vybírat:

```
...
if (!q.Empty()) {
    Process *tmp = q.GetFirst();
    tmp->Activate(); // aktivace
}
```

Zařízení je obsaditelné procesem (výlučný přístup).

Zařízení obsahuje dvě fronty požadavků:

- (vnější) fronta čekajících požadavků
- (vnitřní) fronta přerušovaných požadavků

```
Fac.Seize(Proces); // priorita obsluhy = 0
Fac.Seize(Proces, PrioritaObsluhy);
```

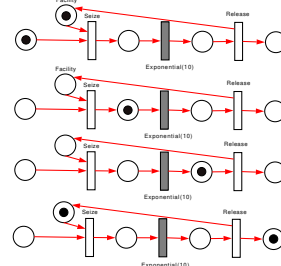
Je třeba rozlišovat dva typy priority v SIMLIB:

- **priorita procesu** (řazení do front, Priority)
- **priorita obsluhy** v zařízení (2. parametr metody Seize)

```
Facility Fac2("Jmeno");
Facility Fac4("Jmeno", &moje_fronta);
Facility Fac5[10];
```

- 1 Jméno se tiskne ve statistikách
- 2 Možnost vnucení jiné fronty (např. společně s jiným zařízením)
- 3 Je možné kdykoli změnit (u fronty pozor na obsah):
  - Fac5[i].SetName("Jmeno")
  - Fac5[i].SetQueue(moje\_fronta)

Obsazení linky, vykonání obsluhy a uvolnění linky



```
Facility F("Fac");
...
class P : Process {
    void Behavior() {
        ...
        Seize(F);
        Wait(Exponential(10));
        Release(F);
        ...
    }
};
```

Používá se pro modelování poruch.

Jde o jiný typ priority, než je priorita procesu.

Zařízení má druhou, vnitřní frontu přerušovaných procesů.

```
...
Seize(Fac);
```

V obsluze je proces A se standardní prioritou obsluhy (0).

```
...
Seize(Fac, 1);
```

Jiný proces B žádá o obsluhu s vyšší prioritou obsluhy. Proces A je odstaven do vnitřní fronty a do obsluhy se dostává B. Při uvolnění zařízení procesem B se vrátí k rozpracované obsluze proces z vnitřní fronty s nejvyšší prioritou obsluhy a dokončí se jeho obsluha.

Sklad umožňuje simultánní přístup ke zdroji s určitou kapacitou (parkoviště, paměť počítače, místa v autobuse).

```
Store Voziky("Voziky", 50);
```

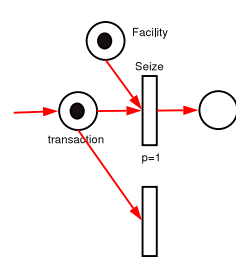
Proces přistupuje ke skladu s požadavkem na obsazení kapacity c. Je-li dostupná kapacita volná, přidělí se (zmenší se množství dostupné kapacity). Není-li, proces čeká ve frontě. (Sklad nemá prioritu obsluhy.)

Proces typicky provádí operace:

```
Enter(Voziky, 1);
Leave(Voziky, 1);
```

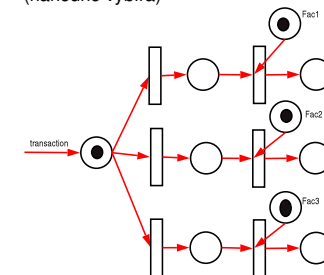
Obdržená kapacita nesouvisí s procesem – vrátit ji může libovolný jiný proces. Při vrácení se uvolní kapacita a prochází se fronta čekajících. První čekající s uspokojitelným požadavkem je obslužen (nemusí být první ve frontě).

Transakce přistupuje k zařízení, ale nechce čekat ve frontě



```
Facility F("Fac");
class Proc : Process {
    void Behavior() {
        ...
        if (!F.Busy())
            Seize(F);
        else
            ...
    }
};
```

Transakce přistupuje (se stává do fronty) k jednomu ze tří zařízení (náhodně vybírá)



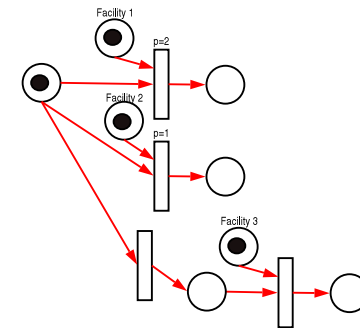
Nedeterminismus je třeba modelovat rovnoměrným rozložením.

```
const int N = 3;
Facility F[N];

class Proc : Process {
void Behavior() {
...
int idx = int( N * Random() );
Seize(F[idx]);
...
Release(F[idx]);
...
}
};
```

Transakce přistupuje k jednomu z N zařízení — vybírá první volné podle priority dané implicitně pořadím prohledávání pole (a pokud není volné žádné, vybere poslední):

```
const int N = 3;
Facility F[N];
...
int idx;
for(idx=0; idx < N-1; idx++)
if(!F[idx].Busy())
break; // první neobsazené
Seize(F[idx]);
...;
```



Transakce přistupuje k zařízení s nejkratší frontou (a pokud je stejně dlouhá u více zařízení, vybere první podle pořadí prohledávání):

```
const int N = 10;
Facility F[N];

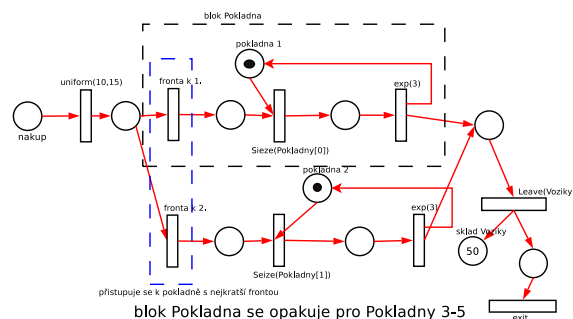
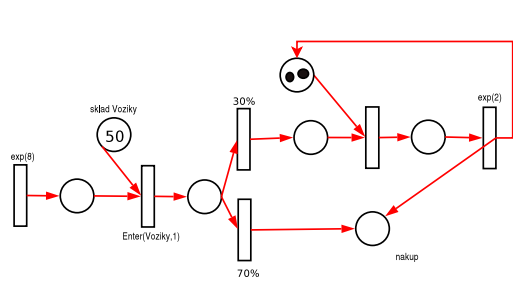
int idx=0;
for (int a=1; a < N; a++)
if (F[a].QueueLen() < F[idx].QueueLen())
idx=a;
Seize(F[idx]);
...;
```

Do samoobsluhy přicházejí zákazníci v intervalech daných exponenciálním rozložením se středem 8 minut. Každý zákazník si nejprve opatří vozík. Vozíky se koncentrují na seřadišti a je jich celkem 50. Zákazník vstoupí do prodejny a 30% jde okamžitě k pultíku s lahůdkami, kde obsluhují dvě prodavačky. Obsloužení zákazníka zde trvá 2 minuty (exponenciálně) a pak zákazník pokračuje běžným nákupem. Běžný nákup trvá 10-15 minut rovnoměrně. Nakonec přistupuje k jedné z pěti pokladen. Vybírá si pokladnu podle nejkratší fronty. Doba obsluhy u pokladny se řídí exponenciálním rozložením se středem 3 minuty. Při odchodu ze systému zákazník vrací vozík.

Zadání: analýza problému, model ve formě SPN, model ve formě SIMLIB

Konceptuální model:

- příchody - řídí se exponenciálním rozložením, střední hodnota je 8 minut
- proces provádí: (1) zabrat vozík, (2) 30% k lahůdkám, (3) nákup, (4) placení, (5) vrácení vozíků
- seřadiště vozíků - 50 kusů, jedna fronta, sklad
- lahůdky - jedna fronta ke dvěma prodavačkám, sklad
- pokladny - 5 pokladen, ke každé stojí zvláštní fronta



Statistiky sbíráme pro zjištění:

- vytížení zařízení (procenta doby)
- délky front, doby čekání ve frontách
- využití kapacity skladů
- celková doba, kterou transakce existuje v systému (a poměr doby užitečné činnosti/čekání ve frontě)

Statistiky:

- minimum
- maximum
- střední hodnota
- rozptyl a směrodatná odchylka

### Třídy:

- Stat
- TStat
- Histogram

### Společné operace:

- s.Clear() — inicializace
- s.Output() — tisk
- s(x) — záznam hodnoty x

Objekty třídy Stat uchovávají tyto hodnoty:

- součet vstupních hodnot  $s_x$
- součet čtverců vstupních hodnot  $s_x^2$
- minimální vstupní hodnotu
- maximální vstupní hodnotu
- počet zaznamenaných hodnot  $n$

Metoda Output tiskne některé tyto hodnoty a navíc průměrnou hodnotu a směrodatnou odchylku:

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}(s_x^2 - n\mu^2)}$$

```
int main() {
    Stat p;
    for (int a=0; a<1000; a++)
        p(Uniform(0, 100));
    p.Output();
}
```

```
-----+
| STAT |
+-----+
| Min = 0.403416 | Max = 99.9598 |
| Number of records = 1000 |
| Average value = 49.8424 |
| Standard deviation = 28.8042 |
+-----+
```

Objekty třídy TStat sledují časový průběh vstupní veličiny. Používají se k výpočtu průměrné hodnoty vstupu (např. délky fronty) za určitý časový interval.

Objekty třídy TStat uchovávají tyto hodnoty:

- sumu součinu vstupní hodnoty a časového intervalu
- sumu součinu čtverce vstupní hodnoty a časového intervalu
- minimální vstupní hodnotu
- maximální vstupní hodnotu
- počet vstupních hodnot
- počáteční čas

Metoda Output tiskne kromě vybraných uložených hodnot také průměrnou hodnotu vstupu za čas od inicializace statistiky (Clear) do okamžiku volání metody Output.

```
//Histogram("Jméno pro tisk", OdHodnoty, Krok, PocetTrid);
Histogram expo("Expo", 0, 1, 15);
...
for (int a=0; a<1000; a++)
    expo(Exponential(3));
```

```
-----+
| HISTOGRAM Expo |
+-----+
| STATISTIC Expo |
+-----+
| Min = 0.00037629 | Max = 24.8161 |
| Number of records = 10000 |
| Average value = 2.94477 |
| Standard deviation = 2.91307 |
+-----+
```

from	to	n	rel	sum
0.000	1.000	2856	0.285600	0.285600
1.000	2.000	2042	0.204200	0.489800
2.000	3.000	1480	0.148000	0.637800
3.000	4.000	1022	0.102200	0.740000
4.000	5.000	771	0.077100	0.817100
5.000	6.000	527	0.052700	0.869800
6.000	7.000	386	0.038600	0.908400
7.000	8.000	273	0.027300	0.935700
8.000	9.000	184	0.018400	0.954100
9.000	10.000	129	0.012900	0.967000
10.000	11.000	105	0.010500	0.977500
11.000	12.000	55	0.005500	0.983000
12.000	13.000	47	0.004700	0.987700
13.000	14.000	47	0.004700	0.992400
14.000	15.000	17	0.001700	0.994100

```
#include "simlib.h"

const int POC_POKLADEN = 5;

// zařízení:
Facility Pokladny[POC_POKLADEN];
Store Lahucky("Oddělení lahůdek", 2);
Store Voziky("Seřadiště vozíků", 50);

Histogram celk("Celková doba v systému", 0, 5, 20);
```

```
class Zakaznik : public Process {
void Behavior() {
    double prichod = Time; // záznam času příchodu
    Enter(Voziky, 1);
    if ( Random() < 0.30 ) { // 30% pravděpodobnost
        Enter(Lahucky, 1);
        Wait(Exponential(2)); // extra obsluha
        Leave(Lahucky, 1);
    }
    Wait(Uniform(10, 15)); // běžný nákup
    // výběr pokladny podle délky fronty:
    int i = 0;
    for (int a=1; a < POC_POKLADEN; a++)
        if (Pokladny[a].QueueLen() < Pokladny[i].QueueLen())
            i=a;
    // pokračování...
```

```
// ..pokračování
Seize(Pokladny[i]); // u pokladny
Wait( Exponential(3) );
Release(Pokladny[i]);
Leave(Voziky, 1);
celk(Time-prichod); // záznam času
} // Behavior
}; // Zakaznik

class Prichody : public Event {
void Behavior() {
    (new Zakaznik)->Activate();
    Activate( Time + Exponential(8) );
}
};
```

## Příklad: Samoobsluha — dokončení

```
int main() // popis experimentu
{
    SetOutput("samoo.dat");
    Init(0, 1000);
    (new Prichody)->Activate(); // start generátoru
    Run(); // běh simulace

    // tisk statistik:
    celk.Output();
    Lahudky.Output();
    Voziky.Output();
    for (int a=0; a < POC_POKLADEN; a++)
        Pokladny[a].Output();
}
```

## Diskrétní simulační jazyky

Základní přehled:

- Simula67 – procesy
- Simscript – popis událostmi, ...
- SIMAN/Cinema, Arena – kombinované, bloky
- GPSS – procesy, bloky
- ...

**Příklady:** viz WWW

**Poznámky:**  
SIMLIB/C++, SimPack, SimPy, ...  
ns-3, OMNeT++

## Shrnutí

- použití diskrétní simulace
- popis modelu (události, procesy)
- generování pseudonáhodných čísel
- systémy hromadné obsluhy
- diskrétní simulační jazyky
- implementace: fronty, kalendář událostí algoritmus řízení simulace "next-event"

**Poznámky:**

Paralelní a distribuovaná simulace  
Speciální typy diskrétní simulace (číslíkové systémy, ...)

## Celulární automaty (CA) – úvod

- Historie: J. von Neumann, J. Conway, S. Wolfram, ...
- Princip CA
- Varianty CA: diskrétní, spojité, stochastické
- Použití:
  - Simulace prostorových dynamických systémů v oblastech: doprava, šíření epidemie/požáru, chemie, růst krystalů, koroze, šíření vln/trhlin, sypání pisku/sněhu, proudění tekutin, ...
  - Modely umělého života, evoluce
  - Grafika: generování textur, fraktálů
  - Výpočty: některé CA jsou *Turing-complete*
- Souvislosti: teorie chaosu, složitost, fraktály, přírodní CA, kryptografie, ...

## Definice CA

CA je typicky diskrétní systém:

- Buňka (*Cell*): základní element, může být v jednom z konečného počtu stavů (například {0, 1}).
- Pole buněk (*Lattice*): n-rozměrné, obvykle 1D nebo 2D, – rovnoměrné rozdělení prostoru, – může být konečné nebo nekonečné.
- Okolí (*Neighbourhood*): Různé typy – liší se počtem a pozicí okolních buněk se kterými se pracuje.
- Pravidla (*Rules*): Funkce stavu buňky a jejího okolí definující nový stav buňky v čase:

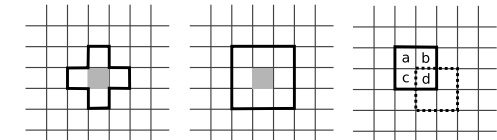
$$s(t + 1) = f(s(t), N_s(t))$$

## Typy okolí

Závisí na rozměru prostoru a tvaru buněk.

Příklady pro 2D a čtvercové buňky:

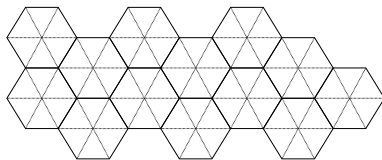
- Von-Neumann
- Moore, Extended Moore
- Margolus



**Poznámka:** Existuje celá řada jiných typů okolí

## Typy okolí – pokračování

- Šestiúhelníkové okolí



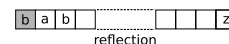
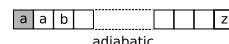
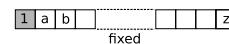
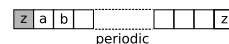
**Poznámka:**

Implementace: převod šestiúhelníková → čtvercová struktura

Použití: např. růst krystalů, šíření vln (FHP,...)

## Okrajové podmínky

- Periodické
- Pevné (*Fixed*): konstantní hodnota
- *Adiabatic*: hodnota vedlejší buňky (= nulový gradient)
- *Reflection*: hodnota předposlední buňky



## Implementace CA

Implementace uložení buněk a pravidel

- Přímá: každá buňka uložena zvlášť v poli
- Vyhledávací tabulka: jen „nenulové“ buňky
- SIMD styl: více buněk v jednom int + bitové operace
- *Hash life*: cache, quad-tree, (*memoized algorithm*)
- ...

**Poznámka:** Snadno paralelizovatelné



Hra *Life*: CA, který nastavíme na počáteční stav a spustíme.

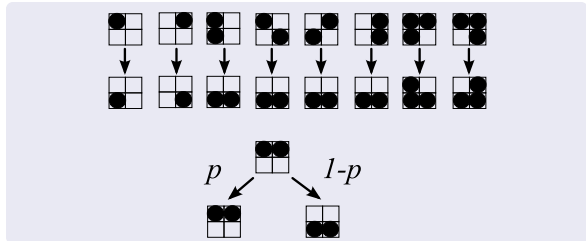
### Definice automatu pro hru Life

- Buňka: stavy '0' nebo '1'
- Pole buněk: dvourozměrné (2D)
- Okolí (typu *Moore*): 8 okolních buněk
- Pravidla: závislost na počtu '1' v okolí:
  - buňka '1' zůstane ve stavu '1', když má 2–3 sousedy '1'
  - buňka '0' se změní na '1', když má právě 3 sousedy '1'
  - jinak bude nový stav buňky '0'

I takto jednoduchý CA vykazuje velmi zajímavé chování – viz příklady na WWW

Sypání písku (*sand rule, sandpile model*)

- Okolí typu Margolus
- Pravidla:



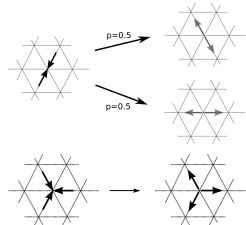
Hypotetický mravenec (*Langton's ant*):

- Čtvercové pole buněk
- Buňky jsou bílé nebo šedé
- Pravidla:
  - Při příchodu na bílou buňku změni směr o 90 stupňů doleva a obarví ji na šedou
  - Při příchodu na šedou buňku změni směr o 90 stupňů doprava a obarví ji na bílou
- Vykazuje překvapivě zajímavé a složité chování

**Poznámka:** viz demo

Např. model pohybu tekutiny:

- Šestiúhelníkové okolí
- Buňky obsahují částice a jejich směr pohybu
- Pravidla viz obrázky + volný průlet v ostatních případech



Nagel-Schreckenberg model

- Silnice je rozdělena na úseky (cca 7m)
- Úsek je buď prázdný nebo je v něm auto
- Stav auta  $j$ : rychlost ( $v_j = 0, 1, \dots, v_{max}$ )
- Pravidla provádíme v pevném pořadí:
  - R1: Akcelerace – rychlost  $v_j$  zvýšíme o 1, max na  $v_{max}$
  - R2: Brzdění podle vzdálenosti  $d_j$  buněk od předchozího auta  $v_j = \min(d_j, v_j)$
  - R3: Náhodná změna rychlosti na  $\max(v_j - 1, 0)$  s pravděpodobností  $p$
  - R4: Posun auta o  $v_j(t + 1)$  buněk

**Poznámka:** pouze minimální model, existují různé varianty.

Musí popisovat změnu stavu pro všechny možnosti.

$$s(t + 1) = f(s(t), N_s(t))$$

- Typy pravidel:
  - "legal" – z nulového vstupního stavu nesmí vzniknout nenulový stav
  - "totalistic" – rozhoduje *součet* vstupních stavů
- Počet možných pravidel závisí na počtu stavů a velikosti okolí. Například pro jednorozměrné okolí, na vstupu 3 prvky se stavy 0/1 (tzv. elementární automat) existuje celkem  $2^3 = 8$  možností vstupu a tedy  $2^8 = 256$  všech možných funkcí/pravidel.

Reverzibilní automat je systém, který neztrácí informaci při svém vývoji v čase. Proto je v každém okamžiku možno otočit běh času nazpátek a vracet se k předchozím stavům.

Například pokud definujeme nový stav buňky takto:

$$s(t + 1) = f(s(t), N_s(t)) - s(t - 1)$$

je možné pro libovolné  $f$  počítat předchozí stav:

$$s(t - 1) = f(s(t), N_s(t)) - s(t + 1)$$

- Konfigurace CA je definována jako stav všech buněk
- Stav CA se vyvíjí v čase a prostoru podle zadaných pravidel
- Čas i prostor jsou diskretizovány
- Počet stavů buňky je konečný
- Buňky jsou identické
- Následující stav buňky závisí pouze na aktuálním stavu

Celulární automaty můžeme rozdělit podle jejich dynamického chování do 4 kategorií:

### Třídy CA

- třída 1:** Po konečném počtu kroků dosáhnou jednoho konkrétního ustáleného stavu
- třída 2:** Dosáhnou periodického opakování (s krátkou periodou) nebo zůstanou stabilní.
- třída 3:** Chaotické chování (výsledné posloupnosti konfigurací tvoří speciální fraktální útvary).
- třída 4:** Kombinace běžného a chaotického chování (například *Life*), nejsou reverzibilní.

Zdroj: Wolfram S.: *New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002

- Možné problémy: nekonečné pole buněk, vizualizace, ...
- Existuje řada volně dostupných nástrojů.

**Příklady simulátorů CA**

- Golly (HashLife)
- různé Java applety – viz WWW,
- SimCell (dynamické CA),
- Xtoys (jednoduché, C, xlib),
- cage (Python),
- ...

- Obsah:
- Typické aplikace spojité simulace
  - Formy popisu spojitych modelů
  - Převod rovnic na blokové schéma
  - Numerické metody
  - Spojité simulační jazyky
  - Příklady

- Elektrické a elektronické obvody
- Řízení (automatizace)
- Fyzika
- Chemie
- Astronomie (pohyb planet)
- Biologie (model srdce)
- Ekologie (rozptyl znečištění)
- ...

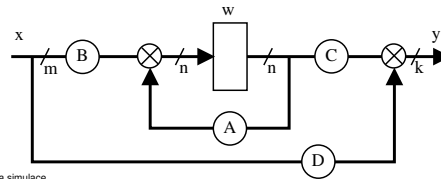
**Poznámka:** Konkrétní příklady viz WWW

- Soustavy obyč. diferenciálních rovnic (ODE)
- Soustavy algebraických rovnic
- Algebraicko-diferenciální rovnice (DAE)
- Bloková schémata
- Parciální diferenciální rovnice (PDE)
- Elektrická schémata
- ...
- Grafy signálových toků
- Kompartmentové systémy
- Systémová dynamika
- "Bond-graphs"

$$\frac{d}{dt} \vec{w}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{w}(t) + \mathbf{B}(t) \vec{x}(t)$$

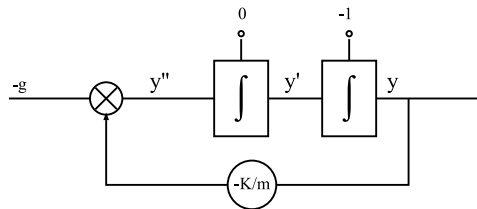
$$\vec{y}(t) = \mathbf{C}(t) \vec{w}(t) + \mathbf{D}(t) \vec{x}(t)$$

kde  $\vec{x}$  je vektor  $m$  vstupů,  $\vec{w}$  vektor  $n$  stavových proměnných,  $\vec{y}$  vektor  $k$  výstupů a  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  matice koeficientů



- Koeficienty (prvky matic  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ) mohou být:
- nezávislé na čase (stacionární systémy),
  - časově proměnné,
  - konstanty (lineární systémy),
  - nelineární funkce (nelineární systémy).

**Poznámka:** Problémy při analytickém řešení



**Poznámka:** Souvislost s analogovými počítači

**Funkční bloky (Bezpečné):**

- konstanty
- T (modelový čas)
- Sin, Cos, Log, ...
- +, -, \*, /
- Uživatelem definované funkce

**Stavové bloky (Paměťové; mají počáteční podmínky):**

- integrátory
- zpoždění
- ...

**Poznámka:** Hierarchie: složené bloky (i kombinované)

Rovnice vyšších řádů musíme převést na soustavu rovnic prvního řádu, pro které máme vhodné numerické metody.

**Metody převodu:**

- Snižování řádu derivace
- Postupná integrace
- Jiné speciální metody

**Poznámky:**  
Pozor na podmínky pro převod  
Existují i num. metody pro řešení rovnic vyššího řádu

- 1 Osamostatnit nejvyšší řád derivace (viz příklad)
  - 2 Zapojit všechny integrátory za sebe a ke vstupu prvního připojit pravou stranu z (1)
- Podmínka: nesmí být derivace vstupů ( $x'$ ,  $x''$ , ...)

Příklad: rovnice  $y'' - 2y' + y = x$

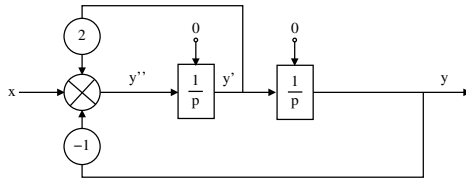
$$y'' = 2y' - y + x$$

$$y' = \int y''$$

$$y = \int y'$$

### Poznámky:

- Typický tvar blokového schématu
- Pozor na počáteční podmínky



Vhodná pro rovnice s derivacemi vstupů na pravé straně

- 1 Osamostatnit nejvyšší řád derivace
  - 2 Postupná integrace rovnice a zavádění nových stavových proměnných
  - 3 Výpočet nových počátečních podmínek
- Podmínka: konstantní koeficienty

Příklad: rovnice  $p^2y + 2py + y = p^2x + 3px + 2x$

$$p^2y = p^2x + p(3x - 2y) + (2x - y)$$

$$py = px + (3x - 2y) + \frac{1}{p}(2x - y), \text{ proměnná } w_1 = \frac{1}{p}(2x - y)$$

$$py = px + (3x - 2y) + w_1$$

$$y = x + \frac{1}{p}(3x - 2y + w_1), \text{ proměnná } w_2 = \frac{1}{p}(3x - 2y + w_1)$$

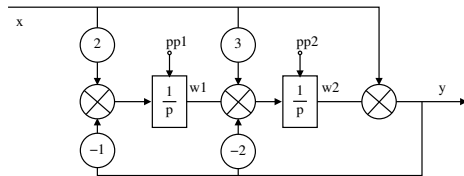
$$y = x + w_2$$

Výsledná soustava rovnic:

$$w_1 = \frac{1}{p}(2x - y), \quad w_1(0) = y'(0) - x'(0) - 3x(0) + 2y(0)$$

$$w_2 = \frac{1}{p}(3x - 2y + w_1), \quad w_2(0) = y(0) - x(0)$$

$$y = x + w_2$$



Při spojité simulaci potřebujeme metody pro:

- řešení ODR 1. řádu (*Initial Value Problem*)
- řešení algebraických rovnic (hledání kořenů – řešení tzv. rychlých smyček)
- (také řešení PDR atd., ale ne v tomto předmětu)

### Poznámky:

- Existuje celá řada metod (viz např. *Netlib*)
- Je nutné znát vlastnosti numerických metod

Hledáme řešení rovnice

$$y' = f(t, y)$$

které má tvar:

$$y(T) = y_0 + \int_0^T f(t, y) dt$$

Na počítači je řešení aproximováno v bodech  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$

Integrační krok:  $h_i = t_{i+1} - t_i$

**Poznámka:** Integrační krok nemusí být konstantní

Obecný princip metody  $N$ -tého řádu:

- 1 Aproximace  $y(T)$  polynomem  $N$ -tého stupně (Taylorův rozvoj)
- 2 Extrapolace – výpočet  $y(t+h)$

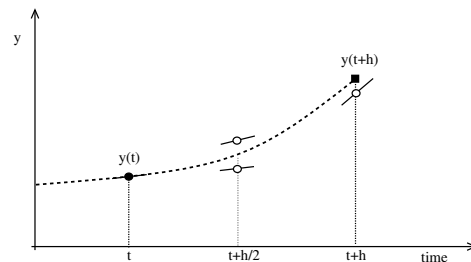
Klasifikace metod:

- Jednokrokové – vychází jen z aktuálního stavu
- Vícekrokové – používají historii stavů/vstupů

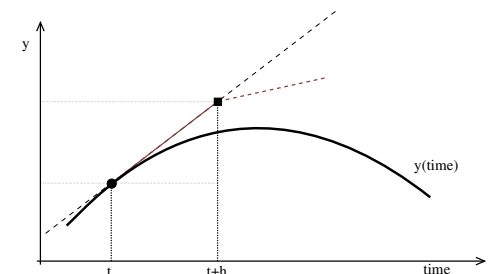
Další možné dělení:

- Explicitní – výsledek získáme dosazením do vzorce
- Implicitní – vyžadují řešení algebraických rovnic v každém kroku

Princip jednokrokových metod (RK4):

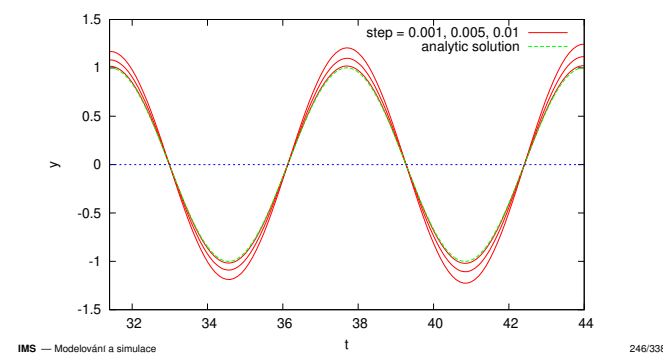
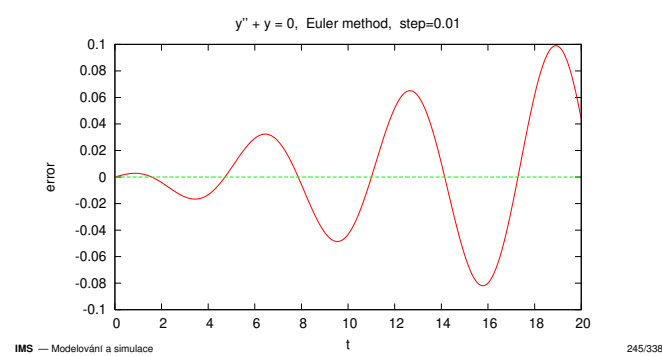


$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t))$$



```
double yin[2], y[2] = { 0.0, 1.0 }, time = 0, h = 0.001;
void Dynamic() { // f(t,y): výpočet vstupů integrátorů
    yin[0] = y[1]; // y'
    yin[1] = -y[0]; // y''
}
void Euler_step() { // výpočet jednoho kroku integrace
    Dynamic(); // vyhodnocení vstupů integrátorů
    for (int i = 0; i < 2; i++) // pro každý integrátor
        y[i] += h * yin[i]; // vypočteme nový stav
    time += h; // posun modelového času
}
int main() { // Experiment: kruhový test, čas 0..20
    while (time < 20) {
        printf("%10f %10f\n", time, y[0]);
        Euler_step();
    }
}
```

IMS — Modelování a simulace 244/338



Skupina metod: RK1=Euler, RK2, RK4, RK8, ...

**RK2: 2. řád**

$$k_1 = hf(t, y(t))$$

$$k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2})$$

$$y(t+h) = y(t) + k_2$$

**RK4: 4. řád**

$$k_1 = hf(t, y(t))$$

$$k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(t + h, y(t) + k_3)$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

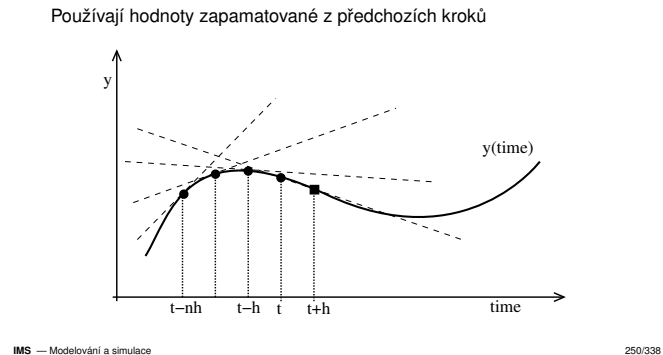
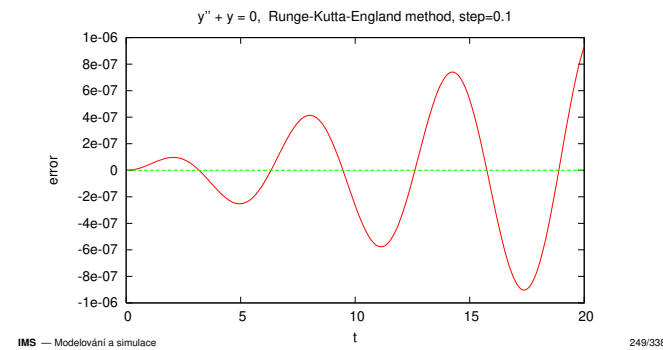
IMS — Modelování a simulace 247/338

Často používané metody — každý spojité simulační systém obsahuje alespoň jednu RK metodu

**Poznámky:**

- Implementace — viz WWW
- Různé další varianty (např. Dormand-Prince 45)
- Specifikace metody tabulkou: *Butcher tableau*
- Odhad chyby
- Změna kroku na základě odhadu chyby
- Existují také implicitní metody RK — viz WWW

IMS — Modelování a simulace 248/338



**Adams-Bashforth:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Metody typu *prediktor/korektor* zpřesňují výsledek:

**Adams-Bashforth-Moulton:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

**Poznámky:**  
 Problém startu metody (řešení: např. použití jednokrokové metody pro první kroky).  
 Existují i samostartující víceřádkové metody.

IMS — Modelování a simulace 251/338

**Chyba metody:**

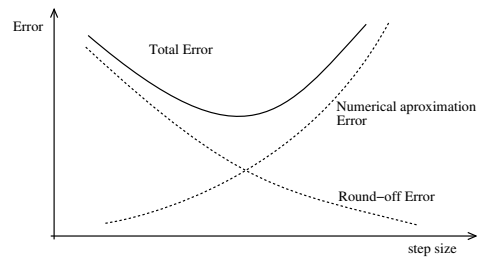
- Lokální chyba (v jednom kroku)
  - Chyba zaokrouhlovací (*round-off error*)
  - Chyba aproximace (*truncation error*)
- Akumulovaná (globální) chyba – maximum odchylky od přesného řešení.

**Stabilita metody:**

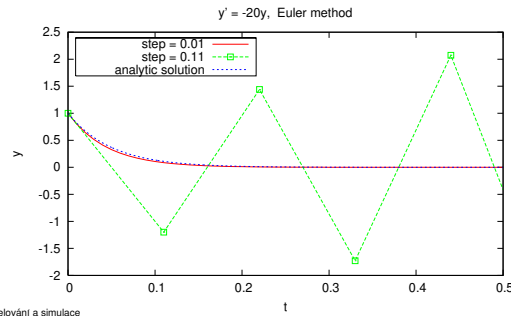
- Stabilita numerického řešení
- Vliv velikosti integračního kroku na stabilitu

**Poznámka:** Příklady nestability/nepřesnosti

IMS — Modelování a simulace 252/338



Rovnice:  $y' = -20y$ , počáteční podmínka:  $y(0) = 1$



Problém: velmi rozdílné časové konstanty

Příklad tuhého systému/rovnice:

$$y'' + 101y' + 100y = 0$$

Řešení:

- Použití speciálních integračních metod (implicitních)
- Zkrácení kroku – často nelze (akumulace chyb, malá efektivita výpočtu)

**Poznámky:** Koefficient tuhosti, explicitní/implicitní metody, oblast stability, A-stabilita, atd. (Podrobnosti viz literatura.)

Neexistuje univerzální (nejlepší) metoda.

- Obvykle vyhovuje některá varianta metody Runge-Kutta 4. řádu.
- Nespojitosti ve funkci  $f(t, y)$  snižují efektivitu více krokových metod (časté startování).
- Tuhé systémy vyžadují speciální implicitní metody.
- Pro ověření přesnosti výsledků je třeba vyzkoušet různé integrační metody nebo různé velikosti kroku.
- Existují meze velikosti kroku (viz stabilita, přesnost).
- Některé metody umí tzv. "dense output" (interpolaci výsledného průběhu uvnitř kroku).

Rovnice systému dravec–kořist (Lotka–Volterra):

$$\frac{dx}{dt} = k_1x - k_2xy$$

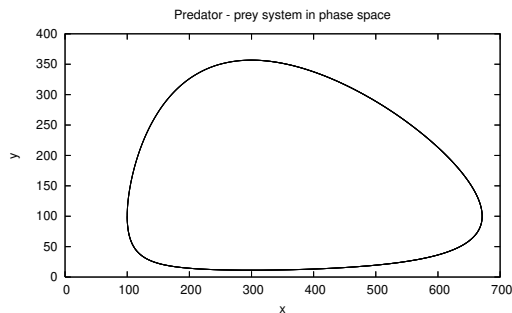
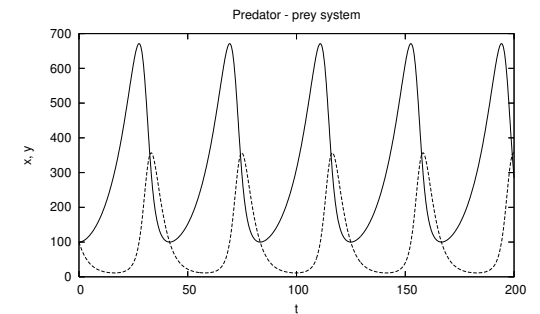
$$\frac{dy}{dt} = k_2xy - k_3y$$

kde:

- $x$  množství kořisti
- $y$  množství dravců

Zobrazení výsledků:

- v čase
- ve fázové rovině (phase space)



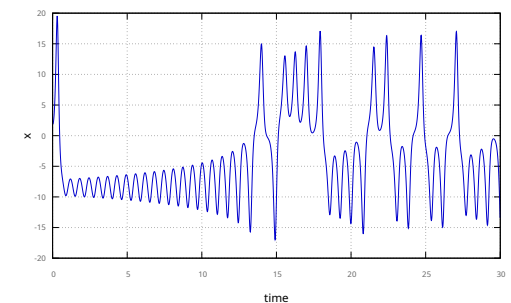
- Nelineární diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

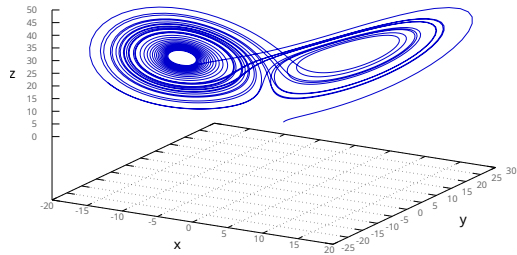
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta * z$$

- Parametry:  $\sigma = 10$   $\rho = 28$   $\beta = 8/3$
- Chaotické chování
- Příklad  $x(0) = 2$   $y(0) = 1$   $z(0) = 1$



## Příklad: chaos – výsledky 3D



## Spojité simulační jazyky

Nástroje na popis modelu + popis experimentů

### Algoritmus řízení spojité simulace:

- 1 Inicializace (nastavit počáteční stav)
- 2 Cyklus dokud není konec simulace:
  - 1 Pokud je vhodný čas provedeme výstup (tisk)
  - 2 Vyhodnocení derivací a výpočet nového stavu
  - 3 Posun modelového času
- 3 Ukončení, výstup

**Poznámky:** Pořadí vyhodnocování. Přesné dokročení na koncový čas.

## Problém uspořádání funkčních bloků

Výpočet závisí na pořadí vyhodnocování *funkčních* bloků

Příklad:

```
a = fa(1,b) # b ještě není vypočítáno = chyba
b = fb(a)
c = fc(a,b)
...
```

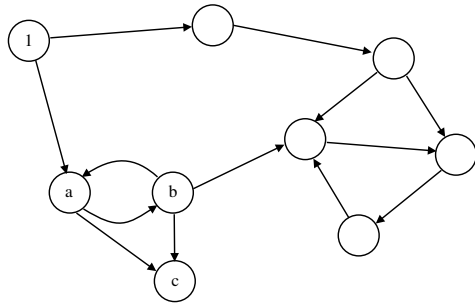
Řešení:

- Seřazení funkčních bloků (*topological sort*)
- Vyhodnocování na žádost (viz SIMLIB/C++)

**Poznámka:** Paměťové bloky (integrátory) mají oddělený vstup a výstup, proto jsou nezávislé na pořadí vyhodnocování.

## Řazení funkčních bloků

Princip algoritmu (hledání silných komponent grafu):



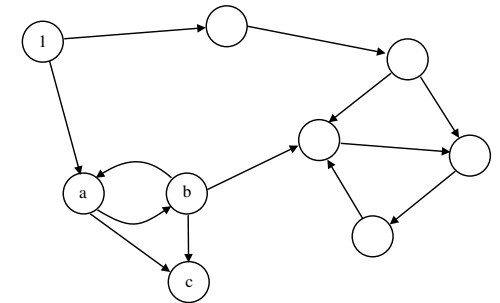
## Rychlé smyčky

Problém: cyklus v grafu závislostí funkčních bloků (způsobeno například příliš vysokou úrovní abstrakce)

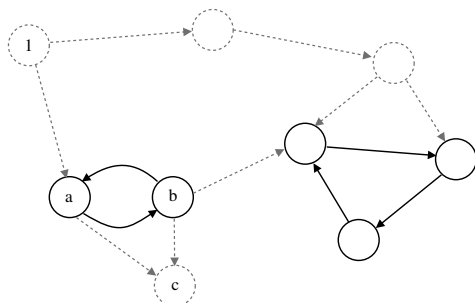
Řešení:

- Rozpojení cyklu speciálním blokem, který (například iteračně) řeší algebraické rovnice.  
Metody: půlení intervalu, Regula-falsi, Newtonova, ...
- Přeprogramování modelu na model bez smyček, například zpřesnění modelu (vlození integrátoru).

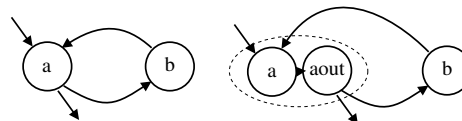
## Rychlé smyčky — obrázek 1



## Rychlé smyčky — obrázek 2



## Rychlé smyčky — možné řešení



## Parciální diferenciální rovnice (PDR, PDE)

Obsahují derivace podle *více proměnných* (např. prostorových souřadnic)

Řešení: diskretizace v prostoru = nahrazení prostorových derivací diferencemi (metoda příemek)

Příklad: kmitající struna — řešení viz WWW

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Počáteční podmínky:  $y(x, 0) = -\frac{4}{\pi}x^2 + \frac{4}{\pi}x$  a  $y'(x, 0) = 0$

Okrajové podmínky:  $y(0, t) = y(l, t) = 0$

Diskretizace:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- Oblasti použití spojité simulace
- Popis modelu
- Numerické metody a jejich základní vlastnosti
- Jazyky, implementace, problémy
- Nároky na výkon počítače

**Poznámky:** Paralelní simulace, superpočítače

- Matlab/Simulink (R), SciLab, GNU Octave
- Modelica: Dymola (R), OpenModelica
- ...
- SIMLIB/C++
- SciPy
- GNU Scientific Library
- více viz odkazy na WWW

**Poznámka:** Netlib, SUNDIALS, ...

C++ knihovna pro spojitou i diskrétní simulaci

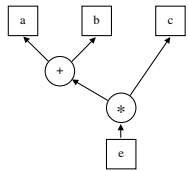
Přehled prostředků pro spojitou simulaci:

- Globální proměnné (typicky jsou pouze pro čtení): StepSize, MinStep, MaxStep, ...
- Bloky: Integrator, Constant, ...
- Blok reprezentující modelový čas: T
- Odkaz na blokový výraz: Input (a blok Expression)

Doplňky: kombinovaná simulace, 2D, 3D, fuzzy, optimalizace

- Automatická konstrukce výrazových stromů (používá přetěžování operátorů v C++)
- Metoda bloku double Value() vyhodnotí vstupy voláním jejich metody Value a vrátí výsledek

Příklad: Expression  $e = (a + b) * c$



**Poznámka:** Pozor: Blok T reprezentuje modelový čas, protože proměnnou Time nelze použít.

Třídy definované v SIMLIB/C++:

- Konstanty, parametry, proměnné: Constant, Parameter, Variable
- Funkční bloky: Function, Sin, Exp, Max, Sqrt, Abs, ...  
Lim, DeadZone, Frict, ...  
pro blokové výrazy: \_Add, \_Mul, ...
- Stavové bloky:
  - Integrator
  - Nelinearity se stavem: Hysteresis, Relay, Blash

**Poznámka:** Relay přesně detekuje okamžik přepnutí

Sledování stavu modelu:

- třída Sampler – periodické volání funkce
- funkce SetOutput(filename) – přesměrování výstupu
- funkce Print(fmt, ...) – tisk typu printf

Nastavení parametrů simulace:

- krok – SetStep(minstep, maxstep)
- požadovaná přesnost – SetAccuracy(abs, rel)
- integrační metoda – SetMethod(name)  
(Metody: "abm4", "euler", "rke"(default), "rkf3", "rkf5", "rkf8")

Řízení simulace:

- Init(t0, t1), Run()
- Stop() – ukončení aktuálního experimentu (běhu)
- Abort() – ukončení programu

```
// kmitání kola (verze 2 - několik experimentů)
// popis systému: y' = ( F - D * y' - k * y ) / M
// nulové počáteční podmínky
#include "simlib.h"
struct Kolo { // popis systému
    Parameter M, D, k;
    Integrator v, y;
    Kolo(Input F, double _M, double _D, double _k):
        M(_M), D(_D), k(_k), // parametry systému
        v( (F - D*v - k*y) / M ), // rychlost
        y( v ) {} // výchylka
    void PrintParameters() {
        Print("# hmotnost = %g kg \n", M.Value());
    }
};
```

```
// Parametry:
double _m=5, _d=500, _k=5e4; // implicitní hodnoty

// Objekty modelu:
Constant F(100); // síla působící na kolo
Kolo k(F, _m, _d, _k); // instance modelu kola

// Sledování stavu modelu:
void Sample() {
    Print("%f %g %g\n", T.Value(), k.y.Value(), k.v.Value());
}
Sampler S(Sample, 0.001);
```

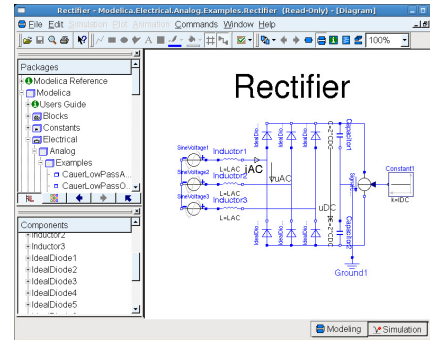
```
int main() { // Popis experimentů ...
    SetOutput("kolo2.dat");
    _Print("# KOL02 - model kola (vice experimentů)\n");
    for(double m=_m/2; m<=_m*5; m*=1.2) {
        k.M = m; // parametr M
        k.D = _d; // parametr D
        k.k = _k; // parametr k
        k.PrintParameters();
        Print("# Time y v \n");
        Init(0, 0.3); // inicializace experimentu
        SetAccuracy(1e-6, 0.001); // max. chyba integrace
        Run(); // simulace
        Print("\n"); // oddělí výstupy experimentů (GnuPlot)
    }
}
```

## Dymola, OpenModelica

- Integrované prostředí  
Dymola = Modelica + GUI + knihovny
- Modelica – simulační jazyk
- Modelica library – std. knihovna
- Nástroj pro modelování fyzikálních systémů
- Dymola je komerční program  
(Demo verze pro Windows je volně k dispozici)

**Poznámka:** Existují volně dostupné (OpenModelica) i komerční alternativy.

## Grafické rozhraní



## Přehled vlastností

- Překlad Modelica → C, závislost na překladači C
- Výstupní formát kompatibilní s MatLab
- Snadné skládání modelů z komponent (knihovny)
- Snadno rozšiřitelné
- Symbolické řešení některých rovnic (algebraické smyčky, soustavy algebraických rovnic, ...) redukuje náročnost numerického řešení modelu
- Efektivní (umožňuje *real-time hardware-in-the-loop* simulaci)

## Jazyk Modelica

- Simulační jazyk vyvíjený od roku 1996
- Vznikla oddělením od Dymoly
- Nezisková organizace: *Modelica Association*
- Objektově orientovaný jazyk
- Popis rovnicemi: diferenciální, algebraické, diskrétní
- Může kontrolovat fyzikální jednotky
- Multimodely pro různé fyzikální systémy
- Existuje standardní knihovna komponent
- Použití: průmysl, výzkum, ...

## Modely v Modelice

- Různé knihovny komponent (modelů):
  - Mechanické: např. převodovky, motory, roboty
  - Elektrické a elektronické obvody: RLC, diody
  - Hydraulické: čerpadla, potrubí
  - Tepelné: chladiče, vedení tepla
  - ...
- Vytváření nových komponent/knihoven
- Modely řídicích systémů, ...

## Příklad: elektrický obvod – RC článek

```

model rc "Model obvodu RC"
  Resistor R(R=1000);
  Capacitor C(C=0.001);
  SineVoltage U(offset=5, V=0.5, freqHz=1);
  Ground ground;
equation
  connect(U.n, C.n); // propojovací rovnice
  connect(U.p, R.p);
  connect(R.n, C.p);
  connect(U.n, ground.p);
end rc;
    
```

## Definice základních komponent obvodu

```

connector Pin
  Voltage v;
  flow Current i; // flow => součet=0
end;

partial model OnePort "abstraktní bazová třída"
  Pin p, n;
  Voltage v; // napětí
  Current i; // proud
equation
  v = p.v - n.v;
  0 = p.i + n.i;
  i = p.i;
end OnePort;
    
```

## Ideální rezistor a kondenzátor

```

model Resistor "ideální rezistor"
  extends OnePort;
  parameter Real R(unit="Ohm") "odpor";
equation
  R*i = v; // Ohmův zákon
end Resistor;

model Capacitor "ideální kondenzátor"
  extends OnePort;
  parameter Real C(unit="F") "kapacita";
equation
  C * der(v) = i; // diferenciální rovnice
end Capacitor;
    
```

## Modelica – shrnutí

- V praxi používané systémy (Dymola, OpenModelica)
- Otevřený jazyk Modelica + std. knihovna
- Numerické metody (DASSL, ...)
- Výhody
- Nevýhody
- Instalováno na učebně (zastaralá verze, jen pro OS Linux, grant FRVŠ)
- Doporučení: použijte OMEdit – viz [www.openmodelica.org](http://www.openmodelica.org)



= spojitá simulace + diskrétní simulace + jejich propojení

- Problém kombinace událostí a numerické integrace
- Stavové podmínky a detekce jejich změn
- Změna stavové podmínky způsobí stavovou událost
- Problém zkracování kroku ("dokročení" na stavovou událost)
- Skokové změny spojitého stavu a jejich vliv na použitou numerickou metodu
- ...

Speciální bloky – abstraktní třídy:

Condition (detekce jakékoli změny),  
 ConditionUp (změna false → true),  
 ConditionDown (změna true → false)

Odvozené třídy musí definovat metodu void Action() s popisem stavové události.

Podmínka je vždy ve tvaru (vstup >= 0)

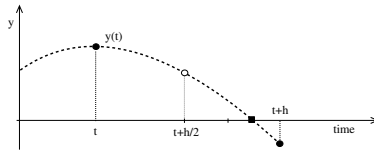
**Poznámka:** SIMLIB používá metodu půlení intervalu při které zkracuje krok až k MinStep

```
struct Micek : ConditionDown { // skákající míček
    Integrator v,y; // stavové proměnné
    unsigned count;
    void Action() {
        v = -0.8 * v.Value(); // ztráta energie...
        y = 0; // eliminace nepřesnosti
        if(count>=20) // max 20 dopadů
            Stop(); // konec experimentu
    }
    Micek(double initialposition) :
        ConditionDown(y), // (y>=0) změna TRUE --> FALSE
        v(-g), // y' = INTG(-g)
        y(v, initialposition), // y = INTG(y')
        count(0) {} // inicializace počtu dopadů/odrazů
};
Micek m1(1.0); // instance modelu
```

**Problém:**

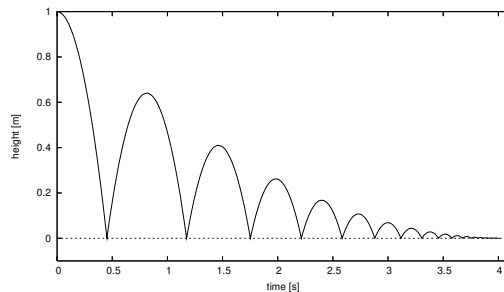
Stavová událost nastane po dosažení zadané hodnoty spojitě veličiny (tj. při změně stavové podmínky) – nelze ji naplánovat.

**Příklad:** Detekce dopadu míčku na zem  
 Hledáme řešení algebraické rovnice  $y(t) = 0$



Metody: půlení intervalu, Regula-falsi, Newtonova, ...

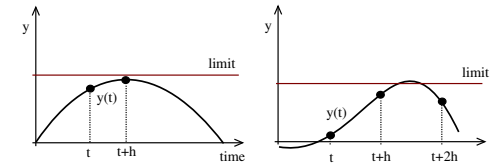
```
Inicializace stavu a podmínek
while ( čas < koncový_čas ) {
    Uložení stavu a času ***
    Krok numerické integrace a posun času
    Vyhodnocení podmínek
    if ( podmínka změněna )
        if ( krok <= minimální_krok )
            Potvrzení změn podmínek
            Stavová událost ===
            krok = běžná_velikost_kroku
        else
            Obnova stavu a času ***
            krok = krok/2
            if (krok < minimální_krok)
                krok = minimální_krok
    }
}
```



Problém: nedetekování stavové události způsobené

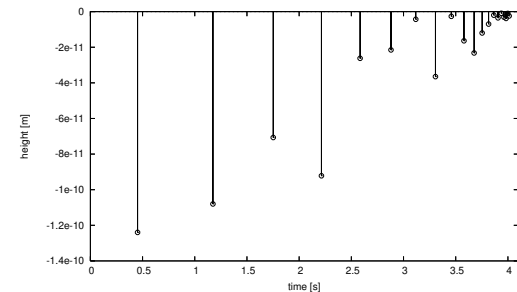
- nepřesností výpočtu
- příliš dlouhým krokem (překročení dvou změn)

**Příklady:**



- Jde pouze o část algoritmu řízení kombinované simulace
- Pseudokód patří do algoritmu next-event místo: Time = čas příští události
- koncový\_čas je čas příští události nebo čas konce simulace
- Stavová událost může plánovat událost (a tím změnit koncový\_čas).
- Krok numerické integrace – délka posledního kroku před koncovým časem musí být vhodně upravena – tzv "dokročení", ale může nastat problém s minimální délkou kroku, proto je dobré použít následující kód:

```
if (Time + krok*1.01 > koncový_čas)
    krok = koncový_čas - Time;
```



### Úrovně popisu:

- Elektrická – tranzistory, rezistory, kondenzátory (spojité modely)
- Logická – hradla, klopné obvody (diskrétní modely)
- Meziregistrové přenosy – čítače, řadiče, ALU (diskrétní modely)
- Systémová – procesory, paměti, periferie (diskrétní modely, hromadná obsluha, výkonnost)

Používají se specializované nástroje a techniky:

- SPICE: elektrická úroveň
- VHDL: logická, RTL
- ...

### Modely signálu

- Dvojhodnotové: jen 0 a 1 (málo používané, rychlé)
- Trojhodnotové: + neurčitá úroveň X
- 5-hodnotové: 0, 1, X, R (Rise=růst) a F (Fall=sestup)  
výhoda: přesnější popis, odhalí více hazardů  
nevýhoda: pomalé
- VHDL používá 9 hodnot ("UX01ZWLH-")

Další možné hodnoty:

- Stav Z (vysoká impedance), různá "síla" signálu (u CMOS)  
Statický (\_/\\_) a dynamický (\_/\~/) hazard, ...

### Zpoždění logických členů:

- 0 — nulové (jen pro ověření log. funkce)
- 1 — jednotkové (většinou nevhodné)
- $t_d$  — přiřaditelné (zvlášť pro  $0 \rightarrow 1$  a  $1 \rightarrow 0$ )
- $\langle t_1, t_2 \rangle$  — přesné (rozsah od-do)

### Poznámky:

Zpoždění na spojích

Kontrola časování (např. dodržení předstihu a přesahu u klopných obvodů)

Řízení událostmi  $\Rightarrow$  problém velkého množství událostí v kalendáři (existují i další metody – např. s pevným krokem)

Selektivní sledování: vyhodnocování jen u prvků které jsou ovlivněny změnou na vstupu.

Implementace popisu modelu:

- řízení tabulkami (interpretace)
- kompilovaný model (provádění kódu)

### Poznámky:

problém zpětných vazeb u sekvenčních obvodů (možné je např. iterační řešení),  
problém inicializace (počáteční hodnoty signálů)

### Dvoufázový algoritmus (selektivní sledování):

```
inicializace, plánování události pro nový vstup
while (je plánována událost) {
    nastavit hodnotu modelového času na T
    for (u in všechny plánované události na čas T) {
        výběr záznamu události u z kalendáře
        aktualizace hodnoty signálu
        přidat všechny připojené prvky do množiny M
    }
    for (p in množina prvků M) {
        vyhodnocení prvku p
        if (změna jeho výstupu)
            plánování nové události
    }
}
```

### Typy poruch:

- trvalá 0
- trvalá 1
- zkrat mezi funkčními vodiči

Činnost:

- Specifikace poruch – které poruchy budou modelovány
- Injekce poruch – převod modelu na model s poruchou
- Šíření poruch modelem
- Detekce poruch – projeví se porucha?
- Zpracování výsledků – vytvoření podkladů pro testy

**Poznámka:** Ověřování úplnosti diagnostického systému (věš opakovat pro každou poruchu) je časově náročné

VHDL: vhodné pro složité systémy

Úrovně popisu (lze kombinovat):

- Popis struktury – propojení hradel
- Popis chování
  - algoritmem – proces
  - data flow – RTL (Register Transfer Level)  
např. `o <= transport i1 + i2 after 10 ns;`

Knihovny prvků

**Poznámka:** Příklady viz WWW — Například

<http://www.cs.ucr.edu/content/esd/labs/tutorial/>

```
-- AND hradlo (ESD book figure 2.3)
-- převzato z
-- http://www.cs.ucr.edu/content/esd/labs/tutorial/

library ieee;
use ieee.std_logic_1164.all;

entity AND_ent is
    port(
        x: in std_logic;
        y: in std_logic;
        F: out std_logic
    );
end AND_ent;
```

```
architecture behav1 of AND_ent is
begin
    process(x, y)
    begin -- popis chování
        if ((x='1') and (y='1')) then
            F <= '1';
        else
            F <= '0';
        end if;
    end process;
end behav1;
-- varianta 2
architecture behav2 of AND_ent is
begin
    F <= x and y;
end behav2;
```

= Použití více různých forem popisu pro různé části modelu

Příklad heterogenního modelu řídicího systému:

- spojitá část (spojitý popis)
- A/D převod (vzorkování spojitého stavu)
- číselkový řídicí systém (např. Petriho síť)
- nebo použití fuzzy logiky (popis neurčitosti)
- případně použití neuronových sítí (učení)
- D/A převod (kombinace spojitý/diskrétní)
- ...

**Poznámka:** Jsou nutné odpovídající nástroje

- Vektorové bloky a blokové výrazy
  - 2D vektorové diferenciální rovnice
  - 3D vektorové diferenciální rovnice
- Fuzzy popis modelů s neurčitostí
  - fuzzy množiny
  - fuzzy bloky – fuzzification, inference, defuzzification
  - editor fuzzy množin (Java)
- Optimalizační metody
- + další doplňky...

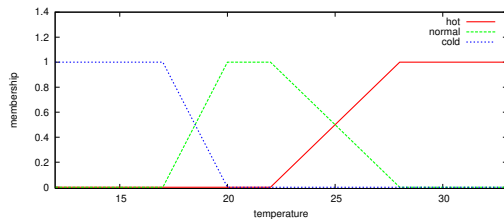
**Poznámka:**

Jde o prototypy = ne zcela úplné, používat opatrně

- Jde o popis jednoho typu neurčitosti – "vágnost" (co znamená, že něco je "malé" nebo "velké"?)
- Rozšíření Booleovské logiky (1965, Lofti Zadeh)
- Vyjádření míry určité vlastnosti – pravdivostní hodnota, stupeň příslušnosti (Pozor – vůbec nesouvisí s pravděpodobností.)
- Pojmy: fuzzy množina, funkce příslušnosti
- Použití fuzzy logiky: řízení, expertní systémy, ...

**Poznámka:** Podrobnosti viz např. PDF na WWW: Navara M., Olšák P.: *Základy fuzzy množin*, ČVUT, Praha, 2002

Př: teplota v místnosti, 3 fuzzy množiny a jejich funkce příslušnosti: malá – střední – velká ("cold" – "normal" – "hot")



Fuzzifikace: převod "ostré" hodnoty na míru příslušnosti (Příklad: 18 °C → cold:0.5, normal:0.5, hot:0)

Fuzzy

negace:  $\neg_s \alpha = 1 - \alpha$

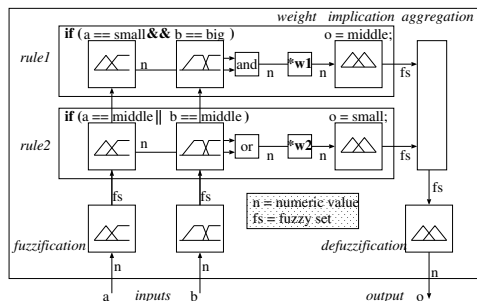
konjunkce:  $\alpha \wedge_s \beta = \min(\alpha, \beta)$

disjunkce:  $\alpha \vee_s \beta = \max(\alpha, \beta)$

**Poznámka:** Existují i jiné definice operací

Postup vyhodnocování:

- převod vstupu na míru příslušnosti (*fuzzification*)
- aplikace pravidel (*if-then rules*)  
Příklad pravidel:  
IF teplota IS malá THEN topit=hodně  
IF teplota IS střední THEN topit=málo  
IF teplota IS velká THEN topit=chladit
- spojení výstupů pravidel (*aggregation*)
- převod na "ostré" hodnoty (*defuzzification*)



```
// Fuzzy množiny:
FuzzySet itype("itype", 0, 40,
    FuzzyTrapez("small", 0,0,18,20),
    FuzzyTrapez("medium", 18,20,22,28),
    FuzzyTrapez("big", 22,28,40,40)
);

class MyBlock : public FuzzyBlock {
    FuzzyInput in;
    FuzzyOutput o, o2;
    void Behavior() { // Pravidla:
        if (in=="small") weight(0.9), o="big";
        if (in=="big" || in=="medium") o="small", o2="z";
        if (in=="big" || in=="medium") { o="small"; o2="z"; }
    } // ...
};
```

Cíl: nalezení optimálních hodnot parametrů modelu

Pojmy: operační výzkum, lineární/nelineární programování

Optimalizační metody:

- gradientní
- simulované žhání (Simulated Annealing)
- genetické
- ...

Nástroje: Scilab, MATLAB+OptimizationToolbox, ...

**Poznámka:** Složitost optimalizačních úloh

Hledáme  $x$  pro minimum nebo maximum *cenové* funkce  $F(\vec{x})$ .

Minimalizace je algoritmus, který počítá:

$$\vec{x} : F(\vec{x}) = \min \wedge C(\vec{x})$$

kde:

$\vec{x}$  je vektor hodnot parametrů

$F$  je *cenová (Objective)* funkce

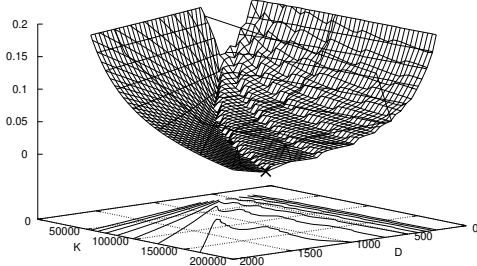
$C$  reprezentuje různá omezení (*Constraints*) – například meze hodnot  $\vec{x}$ .

**Poznámky:**

Maximalizace  $\Rightarrow$  použijeme  $-F$ .

Problém: lokální minima  $\Rightarrow$  používáme *globální optimalizační metody*

Ukázka hledání minima, 3 různé metody:



Vizualizace znamená použití interaktivních vizuálních reprezentací dat pro zlepšení našeho chápání problému.

- interaktivní diagramy
- animace
- 3D zobrazení
- video, ...
- virtuální realita

Nástroje:

- univerzální: Gnuplot, GNU plotutils, ...
- specializované: viz WWW

**Poznámka:** *client-server*, ...

3D interaktivní vizualizace a simulace

- prostředí, které je simulováno počítačem
- člověk je připojen na speciální rozhraní a vstupuje do simulovaného prostředí
- interakce člověk — stroj

**Poznámka:** Souvislost s počítačovými hrami

Čistě matematické řešení modelu.

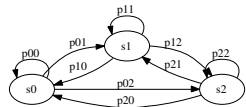
- výhody: efektivní, výsledky jsou obecné a přesné
- nevýhody: analytické řešení pro většinu modelů neznáme/neexistuje

Postup:

- analýza problému
- formulace matematického modelu
- zjednodušení modelu (linearizace, ...)
- matematické řešení modelu

**Poznámka:** Porovnat se simulací

- Při zkoumání dějů v SHO se často předpokládá, že v nich obsažené náhodné procesy jsou *Markovské*.
- Markovské procesy jsou náhodné procesy, které splňují *Markovovu vlastnost*: následující stav procesu závisí jen na aktuálním stavu (ne na minulosti).
- Náhodný proces  $X(t)$  s diskrétním časem a diskrétními stavy, který má Markovovu vlastnost, se nazývá *Markovův řetězec*. Je ekvivalentní konečnému automatu s pravděpodobnostmi přechodů
- Pravděpodobnost stavu  $s_i$  v čase  $t \in N$  označíme symbolem  $\pi_i(t) := P(X(t) = s_i)$ .



• Matice pravděpodobností přechodů: 
$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

(součet na řádku musí být 1)

- Aplikace: SHO, náhodná procházka, hry – házení kostkou

M/M/1 – viz Kendallova klasifikace SHO

- máme jedno zařízení s neomezenou FIFO frontou
- příchody požadavků: exponenciální intervaly s konstantním parametrem  $\lambda > 0$ , nezávisí na stavu modelu a čase
- obsluha: exponenciální trvání s parametrem  $\mu > 0$ .

Počet požadavků v systému  $X(t)$  je Markovský proces.

Popis:

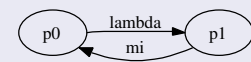
- Vektor pravděpodobností jednotlivých stavů
- Spojitý čas
- Používáme matici *intenzit* přechodů mezi stavy

Jedno zařízení bez fronty – přijde-li požadavek a nemůže být obslužen, opouští systém.

Parametry — příchody: 15 za hodinu, obsluha: 5 minut.

Jaká je pravděpodobnost, že požadavek odchází neobsloužen?

$$\lambda = 15, \mu = \frac{60}{5} = 12 \text{ za hodinu, (poznámka: stabilita).}$$



$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a současně } p_0 + p_1 = 1$$

V ustáleném stavu se pravděpodobnosti již nemění, proto intenzita přechodů násobená pravděpodobností stavu musí být v rovnováze.

Pro *ustálený stav* platí:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \quad \text{a také} \quad p_0 = 1 - p_1$$

Dosadíme a úpravami získáme výsledek:

$$-\lambda(1 - p_1) + \mu p_1 = 0$$

$$-\lambda + \lambda p_1 + \mu p_1 = 0$$

$$p_1(\lambda + \mu) = \lambda$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Pro naše parametry je pravděpodobnost obsazeného zařízení:

$$p_1 = \frac{5}{9}$$

Součet pravděpodobností stavů musí být 1:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1$$

Potom použijeme vzorec pro součet geometrické řady ( $S = \frac{a}{1-q}$ ):

$$p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \dots = \frac{p_0}{1-\rho} = 1$$

a po úpravě dostaneme výsledek:  $p_0 = 1 - \rho$

### Výsledek

Pravděpodobnost, že nebude čekat:  $p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{4} = 0.25$

**Poznámka:** To znamená, že s pravděpodobností  $p_0$  zařízení nepracuje (průměrné využití zařízení je:  $1 - p_0 = \rho = \frac{3}{4}$ ).

Pro srovnání provedeme simulační experimenty v SIMLIB/C++:

Výsledky pro různou dobu simulace (od 1000 do  $10^7$  sekund):

čas [s]	$p_0$ (=nečeká)	$L_w$	$T_w$ [s]	$T_s$ [s]
1000	0.207	1.378	24.38	38.51
5000	0.226	1.646	30.32	44.31
10000	0.168	2.862	54.79	70.32
100000	0.248	2.153	42.35	57.05
1e+06	0.254	2.116	42.49	57.46
1e+07	0.250	2.255	45.16	60.16
analytické	0.25	2.25	45	60

Výsledky se blíží přesným hodnotám získaným analyticky.

Systém M/M/1 – výdejna obědů.

Přichází 3 požadavky za minutu, výdej 15 sekund.

Jaká je

- pravděpodobnost  $p_0$ , že strážník nebude čekat,
- průměrná délka fronty  $L_w$ ,
- průměrná doba čekání ve frontě  $T_w$  a
- průměrná doba strávená v systému  $T_s$  ?

$$\lambda = \frac{\text{počet}}{\text{čas}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ příchody za minutu}$$

$$\mu = 4 \text{ dokončené obsluhy za minutu (doba obsluhy } T_o = \frac{1}{\mu})$$

Systém je stabilní ( $\lambda < \mu$ ).

Průměrná délka fronty v ustáleném stavu je suma součinů (délka fronty \* pravděpodobnost stavu s touto délkou fronty) pro všechny možné délky fronty:

$$L_w = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_{k+1}(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k+1} (1 - \rho) =$$

$$= (1 - \rho)\rho^2 + 2(1 - \rho)\rho^3 + 3(1 - \rho)\rho^4 + \dots =$$

$$= \rho^2 - \rho^3 + 2\rho^3 - 2\rho^4 + 3\rho^4 + \dots =$$

$$= \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \dots = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad // \text{ součet řady}$$

### Výsledek

V našem příkladu je průměrná délka fronty:

$$L_w = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 2.25$$

Spolehlivost = schopnost plnit požadované funkce podle stanovených podmínek

Pojem *spolehlivost* může zahrnovat:

- bezporuchovost
- životnost
- ...

### Poznámky:

- Kvalita, ISO9000
- Modely spolehlivosti: kombinatorické, markovské, ...
- *Fail-safe* systémy

Rovnice:  $\vec{\pi}(\infty)\mathbf{A} = \vec{0}$



$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0 \quad \text{kde jsme zavedli} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + \mu p_2 = 0$$

$$p_2 = -\frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 \Rightarrow p_2 = \rho^2 p_0$$

...

$$p_k = \rho^k p_0$$

Doba čekání ve frontě  $T_w$  je úměrná počtu transakcí  $N$  v systému:

$$T_w = T_o \cdot N = T_o \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_k(\infty) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k (1 - \rho)$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k+1} (1 - \rho) \right) = \quad // \text{ obsah závorky již známe}$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = 45s$$

$$T_s = T_w + T_o = \frac{\rho}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + \mu - \lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{\mu - \lambda} = 60s$$

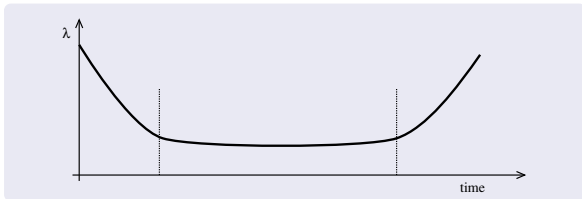
Pro náš příklad je průměrná doba čekání ve frontě 45s a průměrná doba strávená v systému je 60s.

- Pravděpodobnost bezporuchové činnosti  $R(t)$  v intervalu  $(0, t)$ :  $R(t) = e^{-\lambda t}$
- Pohotovost (*availability*)  $a(t)$  = pravděpodobnost, že v čase  $t$  bude systém v provozuschopném stavu. (Vlivy: četnost výpadků, rychlost oprav)
- Střední doba bezporuchové činnosti:  $T_s = \int_0^{\infty} R(t) dt$   
Anglicky: MTBF (Mean Time Between Failures)
- Intenzita poruch  $\lambda(t) = \frac{1}{T_s}$

### Poznámka:

Odolné systémy tolerují poruchy, pojem "*high-availability*".

Typický průběh intenzity poruch  $\lambda(t)$  – vanová křivka



**Poznámka:** Rané poruchy — provoz — stárí.

- Sériové spolehlivostní zapojení:

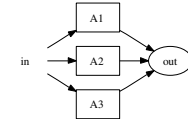
$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

- Paralelní spolehlivostní zapojení:

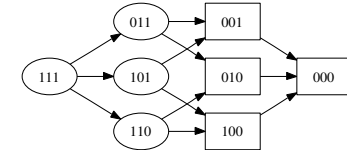
$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$

- Nevýhody: Komplikované sestavování schémat, ...

Příklad systému — tři prvky paralelně:



Stavový graf (1=funguje, 0=porucha, pořadí A1 A2 A3):



- Markovské procesy a řetězce
- Princip analytického řešení
- Výhody/nevýhody
- Aplikace

**Poznámka:** Analyticky lze řešit i jiné typy modelů (nejen výše uvedené)

### Shrnutí:

- Principy modelování a simulace
- Klasifikace systémů a modelů
- Používané metody a algoritmy
- Základy implementace simulačních nástrojů
- Aplikace simulace a souvislosti s různými obory

### Poznámky:

- Co jsme vynechali
- Co se zkouší — cílové znalosti